Fórmula recurrente para el número pi en términos de raíces de 2, a partir del teorema de Pitágoras

Robert Monjo i Agut

Publicado en www.temps.cat , diciembre de 2011

Resumen

Hay muchas expresiones matemáticas que precisan la relación entre la longitud de una circunferencia y su radio. Pero hay una que queremos destacar por ser muy sencilla, ya que se puede estimar a partir del Teorema de Pitágoras (582 a 507 aC). Con ello, proponemos la siguiente expresión para el número pi:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \underbrace{\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\ldots\underbrace{\sqrt{2}}_{n}}}_{3}}}_{2}}}_{1}$$

Esta puede ser una forma divertida para que los jóvenes calculen el valor de pi por su cuenta.

1. Antecedentes

Desde el antiguo Egipto (1600 aC) hasta el siglo pasado, muchos matemáticos han tratado de precisar la relación entre la longitud de una circunferencia y su radio. Pero las primeras expresiones analíticas de las que tenemos constancia sobre la convergencia "exacta" del número pi aparecen a partir de 1665, cuando John Wallis descubre un producto infinito para pi, pero tarda mucho en converger (Gómez-Aroca, 2003):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

El alemán G. Leibniz obtuvo en 1674 una suma sencilla a partir del desarrollo en serie de Taylor del arctangente, que fue obtenida por Gregory en 1671:

$$arc\tan \mathrm{x} = \mathrm{x} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

La serie de Taylor coverge más rápidamente si tomamos x = 1/√3 (Gómez-Aroca, 2003):

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots\right) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2n}\right)$$

Euler (1738) encontró otras expresiones para $\pi/4$ combinando diferentes *arc*tan x. Pero din dudas, la expresión más elegante de Euler es la que encontró en 1734:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Esta fórmula puede entenderse com un caso particular de la Función Zeta de Riemann (1859), basada en la serie de Dirichlet (1805-1859). También se puede deducir a partir del desarrollo en series de Fourier (1822).

2. Expresión alternativa para el número pi

Como ejercicio didáctico, proponemos utilizar la siguiente expresión matemática ya que puede deducirse utilizando matematicas elementales:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \underbrace{\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\ldots\underbrace{\sqrt{2}}_{n}}}_{3}}}_{2}}}_{1}$$

De hecho, es suficiente con conocer el teorema de Pitágoras y cómo se opera con raíces. Para ello, hay que partir de sucesivos 2m-polígonos contenidos en un círculo de radio unitario (Fig. 1)

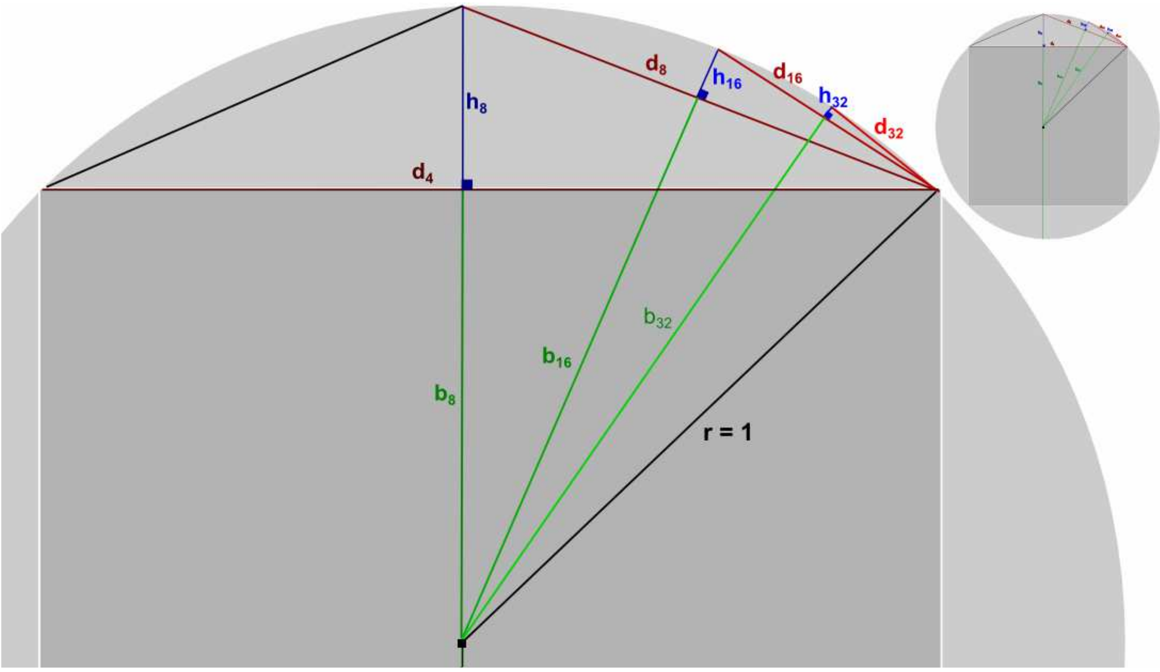

Fig 1. Sucesivos polígonos de 2m lados rodeados de una circunferencia de radio unitario, donde por ejemplo d_4 es el lado del cuadrado, d_8 es el lado del octógono, mientras que b_8 y h_8 son catetos de los dos triángulos rectángulos internos que forma el octógono con el cuadrado.

El cálculo de la longitud del lado de un 2m-polígon, d_{2m}, se puede calcular de forma recurrente según el teorema de Pitágoras. Si observamos el octógono (tomando m = 4), éste se relaciona con el cuadradi (Fig. 1), y por lo tanto podemos encontrar una equación entre b_8 y ½d_4, que es lo mismo que entre b_{2m} y ½d_m:

$$b_{2m} = \sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2}$$

$$h_{2m} = 1-b_{2m} = 1-\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2}$$

$$d_{2m} = \sqrt{h_{2m}{}^2+\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2} = \sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2}$$

$$d_{2m} = \sqrt{1+1-\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2-2\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2}+\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2} = \sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2}}$$

Por lo tanto, sabiendo que el lado del cuadrado es $d_4 = \sqrt{2}$, obtenemos:

$$d_8 = \sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_4\right)^2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}d_4\right)^2} = \sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_4\right)^2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$d_{16} = \sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_8\right)^2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}d_8\right)^2} = \sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_8\right)^2}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$d_{32} = \sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_{16}\right)^2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}d_{16}\right)^2} = \sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_{16}\right)^2}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$d_{2\wedge(n+1)} = \sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_{2\wedge n}\right)^2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}d_{2\wedge n}\right)^2} = \sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_{2\wedge n}\right)^2}} = \underset{1}{\sqrt{2-\underset{2}{\sqrt{2+\underset{3}{\sqrt{2+\ldots\underset{n}{\sqrt{2}}}}}}}}$$

$$d_{2\wedge n} = \underset{1}{\sqrt{2-\underset{2}{\sqrt{2+\underset{3}{\sqrt{2+\ldots\underset{n-1}{\sqrt{2}}}}}}}}$$

El perímetro de un 2^n-polígono se obtiene multiplicando la longitud del lado ($d_{2\wedge n}$) por el número de lados (2^n):

$$p_{2\wedge n} = 2^n d_{2\wedge n} = 2^n \underset{1}{\sqrt{2-\underset{2}{\sqrt{2+\underset{3}{\sqrt{2+\ldots\underset{n-1}{\sqrt{2}}}}}}}}$$

Por lo tanto, π puede obtenerse como la mitad de ese perímetro cuando el número de lados tiende a infinito:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1} \underset{1}{\sqrt{2-\underset{2}{\sqrt{2+\underset{3}{\sqrt{2+\ldots\underset{n-1}{\sqrt{2}}}}}}}}$$

Cambiando n-1 por n, se encuentra finalmente que:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^{n} \underset{1}{\sqrt{2-\underset{2}{\sqrt{2+\underset{3}{\sqrt{2+\ldots\underset{n}{\sqrt{2}}}}}}}}$$

Con n = 16 se obtiene $\pi \approx$ 3,14159260 7, es dir, 7 decimales correctos.

3. Algunas curiosidades matemáticas

3.1. El problema de John Wallis

La primera expresión conocida para el cálculo de pi fue dada por John Wallis en 1665:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots$$

Vemos que este producto infinito puede escribirse como:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left((2n+\lambda_o)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^2\right) \equiv \lim_{n\to\infty} W_n(\lambda_o)$$

donde λ_o = 2, y W_n es la función de Wallis. Es fácil notar que la constante λ_o no es relevante en el límite infinito, ya que el cociente de los dos últimos números tiende a 1, independientemente del valor de λ_o.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n(\lambda_o)}{W_{n-1}(\lambda_o)} = \left(\frac{2n+\lambda_o}{2n-2+\lambda_o}\right)\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\left(\frac{2n}{2n-2}\right) = 1$$

No obstante, la convergencia a $\pi/2$ de la función de Wallis, si depende sensiblemente del valor de esa constante. Vemos por ejemplo que después de 14500 iteraciones, es mejor tomar λ_o = 1,5.

λ_o	$2\cdot W_{14500}$
0	3,14147472422
1	3,14155334363
2	3,14163196305
1.5	3.14159265334

3.2. Convergencias de la nueva función

Como curiosidad, notad que:

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\ldots\underbrace{\sqrt{2}}_{n-1}}}_{3}}}_{2}}}_{1}=2$$

Aprovechamos para definir la función:

$$\xi_n(a,b)=\underbrace{\left(a+\underbrace{\left(a+\underbrace{\left(a+\ldots\underbrace{(a)^{\frac{1}{b}}}_{n}\right)^{\frac{1}{b}}}_{3}\right)^{\frac{1}{b}}}_{2}\right)^{\frac{1}{b}}}_{1}$$

Ejercicio: ¿para qué valores de x existe convergencia en el infinito (n →∞) en la siguiente función?

$$\Omega_n(x)=2^n\left(\xi_\infty(x,x)-\xi_n(x,x)\right)^{\frac{1}{x}}$$

4. Conclusiones

El número π puede calcularse con cierta precisión utilizando el teorema de Pitágoras. Este podría ser un buen ejercicio para los jóvenes con cierto nivel de operaciones con raíces. Además, hemos dejado abierto un problema de convergencias para que puedan divertirse también los aficionados a las matemáticas, con un nivel más avanzado.

Referencias

Fourier, J. (1822), translated by Alexander Freeman (1878). *The Analytical Theory of Heat. Dover Publications*. ISBN 0-486-49531-0. 2003 unabridged republication of the 1878 English translation by Alexander Freeman of Fourier's work *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822).

Gómez-Aroca, J.M. (2003): *El Número* π. Publicat a la web de IES de Bullas (Murcia) http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp/matema/conocer/numpi.htm (consultat el 4 de desembre de 2011). http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp/matema/indice.htm

Riemann, B. (1859): *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Monatsberichte der Berliner Akademie. In Gesammelte Werke, Teubner, Leipzig (1892), Reprinted by Dover, New York (1953).