# Fòrmula recurrent per al nombre pi en termes d'arrels de 2, a partir del teorema de Pitàgores

Robert Monjo i Agut
Publicat a www.temps.cat , desembre de 2011

## Resum

Hi ha moltes expressions matemàtiques que precisen la relació entre la longitud d'una circumferència i el seu radi. Però hi ha una que volem destacar per ser molt senzilla, ja que es pot estimar a partir del Teorema de Pitàgores (582 - 507 a.C.). Amb això, proposem la següent expressió per al nombre pi:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \underset{1}{\sqrt{2-\underset{2}{\sqrt{2+\underset{3}{\sqrt{2+\ldots\underset{n}{\sqrt{2}}}}}}}}$$

Aquesta pot ser una forma divertida per a que els xiquets calculen el valor de pi pel seu compte.

## 1. Antecedents

Des de l'antic Egipte (1600 a.C.) fins al segle passat, molts matemàtics han tractat de precisar la relació entre la longitud d'una circumferència i el seu radi. Però les primeres expressions analítiques que tenim constància sobre la convergència "exacta" del nombre pi apareixen a partir de 1665, quan John Wallis descobreix un producte infinit per a pi, però tarda molt en convergir (Gómez-Aroca, 2003):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

L'alemany G. Leibniz va obtindre en 1674 una suma senzilla a partir del desenvolupament en sèrie de Taylor de l'arctangent, que va ser obtinguda per Gregory en 1671:

$$arc\tan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

La sèrie de Taylor convergeix més ràpidament si prenem x = 1/√3 (Gómez-Aroca, 2003):

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots\right) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2n}\right)$$

Euler (1738) va trobar altres expressions per a $\pi/4$ combinant diferents *arc*tan x. Però sense dubte, l'expressió més elegant d'Euler és la que va trobar en 1734:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Aquesta fòrmula pot entendre's com un cas particular de la Funció Zeta de Riemann (1859), basada en la sèrie de Dirichlet (1805-1859). També es pot deduir a partir del desenvolupament en sèries de Fourier (1822).

## 2. Expressió alternativa per al nombre pi

Com a exercici didàctic, proposem utilitzar la següent expressió matemàtica ja que pot deduir-se amb matemàtiques elementals:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \underbrace{\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\ldots\underbrace{\sqrt{2}}_{n}}}_{3}}}_{2}}}_{1}$$

De fet, és suficient amb conèixer el teorema de Pitàgores i com s'opera amb arrels. Per a això, cal partir de successius polígons de 2m costats continguts en un cercle de radi unitari (Fig. 1).

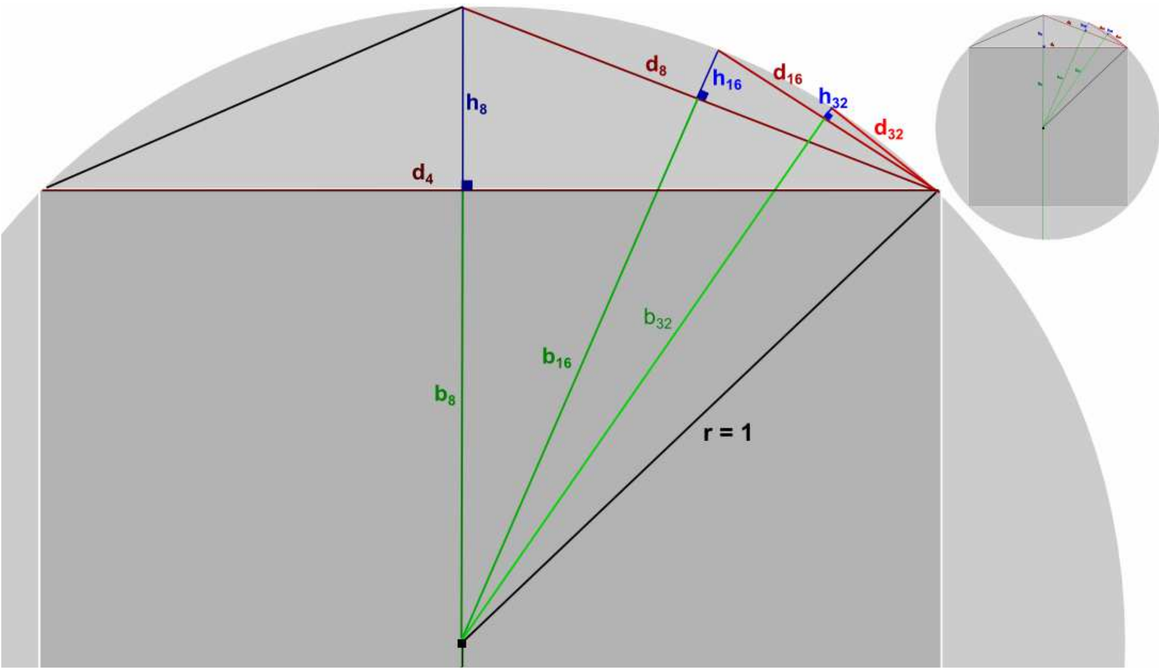


**Fig 1**. Successius polígons de 2m costats envoltats d'una circumferència de radi unitari, on per exemple, $d_4$ és el costat del quadrat, $d_8$ és el costat de l'octògon, mentre que $b_8$ i$h_8$ són els catets dels dos triangles rectangles interns que forma l'octògon amb el quadrat.

El càlcul de la longitud del costat d'un 2m-polígon, $d_{2m}$, es pot calcular de forma recurrent segons el teorema de Pitàgores. Si observem l'octògon (prenent m = 4), aquest es relaciona amb el quadrat (Fig. 1), i per tant podem trobar una equació entre $b_8$ i ½$d_4$, que és el mateix que $b_{2m}$ i ½$d_m$:

$$b_{2m} = \sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2}$$

$$h_{2m} = 1 - b_{2m} = 1-\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2}$$

$$d_{2m} = \sqrt{h_{2m}{}^2 + \left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2} = \sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2}$$

$$d_{2m} = \sqrt{1+1-\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2 - 2\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2} + \left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2} = \sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_m\right)^2}}$$

Per tant, sabent que el costat del quadrat és $d_4 = \sqrt{2}$, obtenim:

$$d_8 = \sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_4\right)^2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}d_4\right)^2} = \sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_4\right)^2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$d_{16} = \sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_8\right)^2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}d_8\right)^2} = \sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_8\right)^2}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$d_{32} = \sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_{16}\right)^2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}d_{16}\right)^2} = \sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_{16}\right)^2}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$d_{2\wedge(n+1)} = \sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_{2\wedge n}\right)^2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}d_{2\wedge n}\right)^2} = \sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}d_{2\wedge n}\right)^2}} = \underset{1}{\sqrt{2-\underset{2}{\sqrt{2+\underset{3}{\sqrt{2+\ldots\underset{n}{\sqrt{2}}}}}}}}$$

$$d_{2\wedge n} = \underset{1}{\sqrt{2-\underset{2}{\sqrt{2+\underset{3}{\sqrt{2+\ldots\underset{n-1}{\sqrt{2}}}}}}}}$$

El perímetre d'un $2^n$-polígon s'obté multiplicant la longitud del costat ($d_{2\wedge n}$) pel nombre de costats ($2^n$):

$$p_{2\wedge n} = 2^n d_{2\wedge n} = 2^n \underset{1}{\sqrt{2-\underset{2}{\sqrt{2+\underset{3}{\sqrt{2+\ldots\underset{n-1}{\sqrt{2}}}}}}}}$$

Per tant, $\pi$ pot obtindre's com la meitat d'aqueix perímetre quan el nombre de costats tendeix a infinit:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1} \underset{1}{\sqrt{2-\underset{2}{\sqrt{2+\underset{3}{\sqrt{2+\ldots\underset{n-1}{\sqrt{2}}}}}}}}$$

Canviant n-1 per n, es troba finalment que:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^{n} \underset{1}{\sqrt{2-\underset{2}{\sqrt{2+\underset{3}{\sqrt{2+\ldots\underset{n}{\sqrt{2}}}}}}}}$$

Amb n = 16 s'obté $\pi \approx$ 3,14159260 7, és a dir, 7 decimals correctes.

## 3. Algunes curiositats matemàtiques

### *3.1. El problema de John Wallis*

La primera expressió coneguda per al càlcul de pi va ser donada per John Wallis al 1665:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots$$

Veiem que aquest producte infinit pot escriure's com:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left((2n+\lambda_o)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^2\right) \equiv \lim_{n\to\infty} W_n(\lambda_o)$$

on $\lambda_o = 2$, i $W_n$ és la funció de Wallis. És fàcil notar que la constant $\lambda_o$ no és rellevant en el límit infinit, ja que el quocient dels dos últims números tendeix a 1, independentment del valor de $\lambda_o$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n(\lambda_o)}{W_{n-1}(\lambda_o)} = \left(\frac{2n+\lambda_o}{2n-2+\lambda_o}\right)\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\left(\frac{2n}{2n-2}\right) = 1$$

No obstant, la convergència a $\pi/2$ de la funció de Wallis, si depèn sensiblement del valor d'aqueixa constant. Veiem per exemple que després de 14500 iteracions, és millor $\lambda_o$ =1.5:

| $\lambda_o$ | $2\cdot W_{14500}$ |
|---|---|
| 0 | 3,14147472422 |
| 1 | 3,14155334363 |
| 2 | 3,14163196305 |
| 1.5 | 3.14159265334 |

*3.2. Convergències de la nova funció*

Com a curiositat, noteu que:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\ldots\underbrace{\sqrt{2}}_{n-1}}}_{3}}}_{2}}}_{1} = 2$$

Aprofitem per a definir la funció:

$$\xi_n(a,b) = \underbrace{\left(a+\underbrace{\left(a+\underbrace{\left(a+\ldots\underbrace{(a)^{\frac{1}{b}}}_{n}\right)^{\frac{1}{b}}}_{3}\right)^{\frac{1}{b}}}_{2}\right)^{\frac{1}{b}}}_{1}$$

Exercici: per a quins valors d'x existeix convergència a l'infinit (n →∞) en la següent funció?

$$\Omega_n(x) = 2^n\left(\xi_\infty(x,x) - \xi_n(x,x)\right)^{\frac{1}{x}}$$

## 4. Conclusions

El nombre $\pi$ es pot calcular amb certa precisió utilitzant el teorema de Pitàgores. Aquest podria ser un bon exercici per als joves amb cert nivell d'operacions amb arrels. A més, hem deixat obert un problema de convergències perquè es puguen divertir també els aficionats a les matemàtiques, amb un nivell més avançat.

## Referències

Fourier, J. (1822), translated by Alexander Freeman (1878). *The Analytical Theory of Heat. Dover Publications*. ISBN 0-486-49531-0. 2003 unabridged republication of the 1878 English translation by Alexander Freeman of Fourier's work *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822).

Gómez-Aroca, J.M. (2003): *El Número* $\pi$. Publicat a la web de IES de Bullas (Murcia) http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp/matema/conocer/numpi.htm (consultat el 4 de desembre de 2011). http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp/matema/indice.htm

Riemann, B. (1859): *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Monatsberichte der Berliner Akademie. In Gesammelte Werke, Teubner, Leipzig (1892), Reprinted by Dover, New York (1953).