Estudi de la variació de G utilitzant el model del globus cosmològic

Robert Monjo i Agut

Departament de Física de la Terra i Termodinàmica, Universitat de València.
robert@temps.cat

Resum

Recentment, s'ha mesurat una possible variació de la “constant” gravitacional G, que pot ser explicada per l'expansió de l'univers. En la majoria dels treballs de recerca, es construeixen models cosmològics que utilitzen "energia fosca" per explicar per què l'expansió de l'univers no s'està reduint per l'acció gravitatòria. En aquest treball es proposa un model alternatiu per explicar la variació de *G* amb l'expansió de l'univers, sense la necessitat de postular l'existència d'energia fosca. El model es basa en una adaptació relativista del model de "globus cosmològic". El model proporciona una explicació de la "constant gravitacional i la seva variació relativa. De fet, el valor previst de la variació relativa ($G^{-1}dG/dt$ = 7,3$\cdot$10^{-11} any^{-1}) és consistent amb les observacions més precises. Un altre dels resultats d'aquest treball és l'obtenció d'un valor per al paràmetre de Hubble igual a 71,3 ± 0,6 km$\cdot$s^{-1}$\cdot$Mpc^{-1}, la qual cosa és consistent amb el valor que actualment s'observa (71 ± 4 km$\cdot$s^{-1}$\cdot$Mpc^{-1}). A més, el model ofereix valors teòrics de l'energia de l'univers (4,10 $\cdot$ 10^{53} *kg*), així com altres quantitats cosmològiques, com la massa mínima mesurable ((1,36 ± 0,01) $\cdot$ 10^{-67} *kg*) i l'interval mínim de temps (1,4$\cdot$10^{-105}*s*).

Paraules clau: Variació de G · Model del globus · Expansió de l'univers

1 Introducció

L'observació de totes les magnituds físiques, incloent el temps i l'energia, semblen estar afectades per un fenomen quàntic de deslocalització (Weinberg, 1995), per la qual cosa tot fa pensar que les equacions cosmològiques també han de ser sotmeses al procés de quantització (Carlip, 2001; Rovelli, 2004). Però abans d'això cal entendre millor l'expansió de l'univers, així com l'origen i l'evolució de la constant d'acoblament de la gravitació, *G*.

Dirac (1938) fou el primer en suggerir la possibilitat de que *G* podria variar en funció de l'edat de l'univers, concretament va proposar que *G* és una funció de la inversa del temps. Aquesta teoria es va desenvolupar dècades després per Brans i Dicke (1961). Contràriament a això, altres autors proposen que *G* augmenta amb l'edat de l'univers (Hellings *et al.*, 1983; Abdel-Rahman, 1990; Massa, 1997; Arbad, 2003). En l'actualitat nombrosos autors conclouen que s'ha mesurant una variació de *G*, però no hi ha consens en el signe ni en la magnitud (Salam i Wigner, 1972; Müller *et al.*, 1991; Demarque *et al.* 1994; García-Berro *et al.* 1995; Thorsett, 1996; Benvenuto *et al.*, 1999; Olive *et al.*,2002).

D'altra banda, en l'actualitat s'ha produït un avanç important en la mesura d'altres paràmetres cosmològiques, i s'han obtingut resultats confosos per a la densitat de l'univers i l'expansió. Concretament surt una densitat igual a la crítica però una expansió no frenada (Tegmark *et al.*, 2004; Spergel *et al.*, 2007; Hinshaw *et al.*, 2009). Per a explicar els resultats, ha estat necessari introduir el concepte d'energia obscura, de tal manera que ara l'expansió queda garantida per l'acceleració que provoca dita energia, compensant així l'atracció gravitatòria de la densitat crítica.

En cosmologia moderna, habitualment s'empren 4 dimensions macroscòpiques a més de les propostes a escala microscòpica en la teoría de Kaluza-Klein i la teoria de cordes (Green *et al.*, 1987; Wuensch, 2003). Aquestes dimensions macroscòpiques poden trobar-se corbades per l'efecte de l'energia (Einstein, 1916; O'Neill, 1983), per la qual cosa habitualment es construeixen models d'expansió de l'univers tenint en compte la massa-energia que existeix. No obstant actualment s'ha vist necessari la postulació de l'existència d'una energia "obscura" (no observable) per a poder explicar el fet que l'expansió de l'univers no es frena per l'acció gravitatòria.

En aquest treball proposem un model senzill alternatiu per explicar la relació entre la variació de G i l'expansió de l'univers, sense la necessitat de postular l'existència de l'energia obscura. El model es basa en una adaptació relativista del model cosmològic del globus (Eddington, 1933).

El model cosmològic del globus tracta d'explicar la llei de Hubble (1937), és a dir, per què tots els grans cúmuls de l'univers es separen entre sí, exceptuant aquells suficientment pròxims, atrets per l'acció gravitatòria, com ara l'Andròmeda (Slipher, 1913). Tal i com van fer popular Eddington (1933) y Hoyle (1960), si dibuixem galàxies en la superfície d'un globus i l'inflem, aquestes es separen entre sí, d'una forma molt similar a com es separen en l'univers. És a dir, podem fer l'analogia on la superfície del globus (2D) és la hipersuperfície (3D) de l'univers, de tal manera que el radi de l'expansió és proporcional al temps. El fet d'inflar-se el globus suposa una dimensió temporal, però el fet de que el globus siga una superfície corbada (2D) obliga a que estiga contingut en un volum (3D). Aleshores es proposa que a l'univers li ocorre de forma similar: Per poder descriure millor la hipersuperfície corbada (3D) podem emprar un hipervolum espacial (4D), a banda de la dimensió temporal independent.

Una altra possible similitud entre l'univers i la superfície del globus la torbem en que és finit (en espai i en temps) i no té cap punt privilegiat, ja que el seu centre no es troba en la superfície. Si l'univers té una edat finita, tal i com suggereixen les observacions, i donat que la velocitat màxima d'expansió és finita, sembla impossible que l'univers siga infinit. Per això descartem *a priori* que l'univers siga totalment pla o obert, ja que necessàriament això implica infinitud o fronteres, i per tant un punt privilegiat (centroide). És a dir, sembla que únicament té sentit relativista un univers tancat i conseqüentment amb curvatura positiva. Amb aqueixes idees, el model més senzill d'univers que podem formar és aquell que presenta una màxima simetria espacial: la hiperesfera.

A més a més, el nostre model de globus cosmològic ha de satisfer la relativitat general (Einstein, 1916), per la qual cosa cal incorporar el signe canviat a l'element temporal del tensor mètric, corresponent a la variable temporal. I per a una primera aproximació d'univers heterogeni, també és necessari postular algunes relacions addicionals.

2 Consideracions empleades

2.1 Model del globus cosmològic

En primer lloc vam construir un model cosmològic que satisfera la relativitat i que presentara una curvatura possitiva, de tal manera que fos finit i no presentara fronteres (punts privilegiats). Amb això es dedueix que, en el nostre model, l'univers té 4 dimensions contingudes en un espai de 5 dimensions, amb producte definit de traça –3; és a dir 4 dimensions espacials, (x, y, z, u), i una temporal, (T). Es tracta, doncs, d'una varietat de Lorentz o pseudoriemanniana de signatura (1, 4), segons la notació formal (O'Neill, 1983). Si bé, també es coneix com espai Minkowskià 5D (Dvali *et al.*, 2000). D'ara endavant, escrivim el vector d'espai-temps com $L = (T, x, y, z, u)$.

Les cinc dimensions proposades són macroscòpiques a diferència del que es proposa en les teories de Kaluza-Klein (Overduin i Wesson, 1997; Wuensch, 2003). A més, ha d'existir una condició de lligament de tal manera que reduïm l'espai de configuració en una dimensió topològica menys (Salvatore and Longoni, 2005). Aqueixa condició de lligament ve donada per la següent relació: tots els successos de l'univers L_i = (T_i, x_i, y_i, z_i, u_i) tenen el mateix mòdul respecte a un determinat origen de referència; és a dir, existeix un origen de coordenades O tal que es satisfà:

$$\left|L_i - O\right|^2 = \tau_o^{\,2} \quad \forall L_i \tag{2.1}$$

on τ_o és una constant. Si escollim zero l'origen O = (0, 0, 0, 0, 0), i suposem que el temps T és molt més gran que τ_o, aleshores aquesta condició de lligam esdevé en l'equació d'un hipercon centrar en l'origen O; és a dir, per a temps grans l'univers vist des de l'origen pren la forma d'una hipersuperfície 4D expandint-se front el temps T, segons:

$$T^2 \approx x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = \vec{r}^{\,2} + u^2 \tag{2.2}$$

on hem definit el vector r com el vector de les coordenades espacials ordinàries (x, y, z). D'altra banda, els observadors no es troben en l'origen, on, per definició, no passa el temps, sinó que formen part d'aqueix univers en expansió (hipersuperfície). Per tant, per a escollir un nou sistema de referència necessitem un punt espacial fix però observable, r_o; en altres paraules, el punt espacial (r_o) ha de pertànyer a l'univers actual, i per la qual cosa ha de satisfer l'equació 2.2. Si escollim zero per a les components espacial ordinàries, x, y i z, aleshores necessàriament tenim que $u = T$, on T és l'edat de l'univers en cada instant de les observacions. És a dir, el nostre punt espacial de referència es troba en la trajectòria L = (T, 0, 0, 0, T), però per estudiar els mòbils ens interessa fixar el temps de referència en T_o, per la qual cosa, finalment el "punt" d'espai-temps de referència és W ≡ (T_o, 0, 0, 0, T).

El sistema de referència TXYZ es construeix amb un hiperplà tangent en el punt espacial de referència, i perpendicular a la direcció U. El nostre "punt" W pertany a aqueix hiperplà i és tracta d'una trajectòria imaginària de l'espai-temps, ja que sols satisfà l'equació 2.2 per a l'instant de referència T_o (Figura 1).

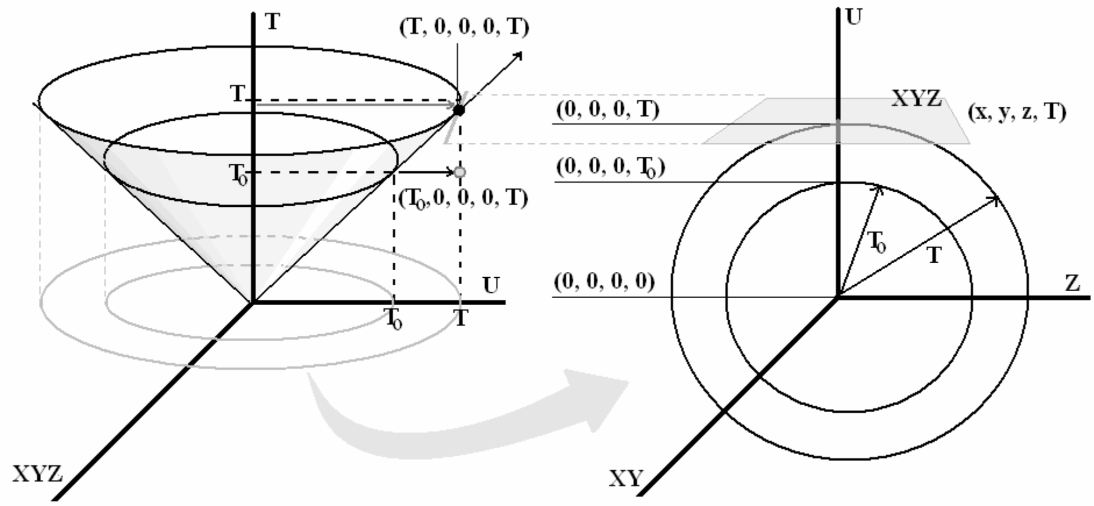

Figura1. Representació gràfica de les 5 dimensions de l'univers (esquerra) i projecció de l'univers sobre l'hiperplà de 4 dimensions espacials (dreta).

En l'entorn de l'univers pròxim a W, l'espai és quasi pla, però si ens separem del punt de referència, la regió pertanyent a la hipersuperfície és cada cop menys plana. Per tant definirem un angle de separació γ que ve donat per la hiperesfera que s'obté de l'equació 2.2

per a cada instant *T*. Si definim la distància ordinària *r* com el mòdul del vector sub-espacial (x, y, z), aleshores el sinus de l'angle de separació és el quocient entre *r* i *T*, és a dir:

$$T^2 = \vec{r}^{\,2} + u^2 \qquad \longrightarrow \qquad \begin{cases} \sin\gamma = \dfrac{r}{T} \\ \cos\gamma = \dfrac{u}{T} \end{cases} \tag{2.3}$$

on l'instant *T* el considerem el radi. És a dir, la condició de lligament anterior ens ha portat ara a dir que:

$$u = T\sqrt{1-\frac{r^2}{T^2}} \tag{2.4}$$

Hom pot pensar que per a descriure un mòbil en el sistema de referència de W cal fer una transformaciò de Lorentz (Møller, 1952) de les coordenades des del sistema *O* a W, considerant la velocitat relativa, que per a $r = 0$ es troba en la direcció *u*, i és $du_w/dT = 1$. No obstant, això únicament és cert si el sistema de referència W pertany a l'univers (segons l'equació 2.1 o 2.2), és a dir, únicament per a $T = T_o - \tau_o$. Per tant, necessàriament hem de fer una hipòtesi nova: La nostra percepció de l'univers és tal que ens sembla que existeix el "punt" *W*, on teòricament hi som, de manera que qualsevol punt ***s*** observat des de *W*, s'escriurà com la diferència entre les components de ***s*** i les de *W*. Dit d'una altra manera, tot succeeix com si estiguérem observant des del punt *O*, però restant la diferència de *W* a tots els punts:

$$s \equiv L - W \ = \ (T - T_o,\ x,\ y,\ z,\ u - T) \tag{2.5}$$

Amb l'equació 2.4 podem escriure que:

$$s = \left(t,\ \ \vec{r},\ \ -T\left(1-\sqrt{1-{r^2}/{T^2}}\right)\right) \tag{2.6}$$

on hem definit que $t \equiv T - T_o$. A més, si la distància de *r* és petita respecte al temps *T*, aleshores podem aproximar que:

$$-T\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{T^2}}\right) \approx -\frac{r^2}{2T} \qquad sii \quad r << T \tag{2.7}$$

És a dir, les 4 dimensions aparents es mostren de forma explícita, segons:

$$s = (t,\ \ \vec{r},\ \ -r^2/2T) \tag{2.8}$$

i per tant, localment (r << T) l'espai esdevé pla i podem reproduir la mètrica de Minkowski. D'altra banda, com que l'univers es troba en expansió, veiem que per a un objecte que no canvia d'angle respecte el sistema coordinat, tenim:

$$\sin\gamma\cdot\vec{k}_r = \frac{\vec{r}}{T} \ \ \rightarrow\ \ 0 = \frac{d\vec{r}}{T} - \frac{\vec{r}}{T^2}dt \ \ \rightarrow\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{r}}{T} \tag{2.9}$$

on $\boldsymbol{k_r}$ és el vector direcció de ***r*** i γ és l'angle relatiu de l'objecte estudait respecte a *W*. És convenient, doncs, usar una variable espacial independent del temps, com és el cas de l'angle. Amb ell definim unes coordenades espacials comòbils, ***r'***, segons:

$$\vec{r}\,' \equiv T_o \sin\gamma\cdot\vec{u}_{\vec{r}} \ \ \rightarrow\ \ \vec{r}\,' = T_o\frac{\vec{r}}{T} \tag{2.10}$$

Aleshores és possible reescriure l'equació 6, segons:

$$s = \left(t,\ \ \frac{T}{T_o}\vec{r}\,',\ \ -T\left(1-\sqrt{1-\frac{r'^2}{T_o^{\,2}}}\right)\right) \tag{2.11}$$

D'altra banda, com que tenim 4 graus de llibertat en 5 dimensions, és possible utilitzar la relativitat general per a reduir-les a 4 dimensions espaciotemporals: Siga un observador que es deixa caure, aleshores les seues coordenades pròpies $\{\xi^\alpha\}$ es poden transformar segons un altre sistema de referència $W\{x^{\varepsilon}\}$ a partir del principi d'equivalència d'Einstein (1916). El quadrat del mòdul del vector posició abans de transformar és:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta} \qquad (2.12)$$

on $\eta_{\alpha\beta}$ és el tensor mètric 4-dimensional amb traça –2, mentre que ds és el mòdul del vector posició (Einstein, 1916). Si $ds^2 > 0$ aleshores el temps propi $d\tau$ és defineix com $d\tau = ds$. I per tant, el canvi de sistema de referència, $\{\xi^{\alpha}\} \rightarrow W\{x^{\varepsilon}\}$, ve donat per:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{d\xi^{\alpha}}{dx^{\lambda}} \frac{d\xi^{\beta}}{dx^{\mu}} dx^{\lambda} dx^{\mu} = g_{\lambda\mu}(x) dx^{\lambda} dx^{\mu} \qquad (2.13)$$

on el tensor $g_{\lambda\mu}(x)$ queda definit com:

$$g_{\lambda\mu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{d\xi^{\alpha}}{dx^{\lambda}} \frac{d\xi^{\beta}}{dx^{\mu}} \qquad (2.14)$$

2.2 Energia de l'univers

En el nostre model, l'univers presenta un interval mínim de temps, o quantum de temps, que és igual a la constant τ_o (equació 2.1) Per tant, qualsevol variable espacial x^{α} pot escriure's com un nombre enter de τ_o segons $x^{\alpha} = n^{\alpha} \cdot \tau_o$, on n^{α} és un nombre enter. No obstant podem suposar que, a priori, a escales macroscòpiques aqueixa descripció és pràcticament equivalent a un espaitemps continu, per la qual cosa segueixen sent vàlids els càlculs diferencials.

Per poder entendre la discretització del temps podem fer una analogia física amb la propagació de l'energia d'una ona $\Psi(T)$ en funció del temps T. En aquest cas el medi on es propaga l'ona és l'espai 5D que conté l'univers, i l'ona és l'univers en sí (conjunt d'esdeveniments possibles que acompleixen la condició de lligam $L^2 = \tau_o$). L'energia (o matèria) es propaga pels punts discrets, per exemple aquells que satisfan la condició quàntica de lligament, segons:

$$1 = (n^0)^2 - (n^1)^2 - (n^2)^2 - (n^3)^2 - (n^4)^2 \qquad (2.15)$$

on n^{α} és el nombre enter associat a la variable espacial x^{α}. No obstant, degut a la simetria rotacional *SO(4)* dels eixos del sistema de referència (Weinberg, 2000), els punts de l'espai (i per tant de matèria) poden tenir "infinites" localitzacions. Per la qual cosa proposem fer un tractament similar a la Teoria Quàntica de Camps.

Recordem que, siguen dues magnituds d'un sistema quàntic (Weinberg, 1995, 1996) representades pels observables $\hat{\boldsymbol{A}}$ i $\hat{\boldsymbol{E}}$, aleshores si són operadors autoadjunts i actuen sobre un espai d'estats on es satisfà la desigualtat de Schwarz aleshores, el valor esperat del producte $\hat{\boldsymbol{A}}\cdot\hat{\boldsymbol{E}}$ és major que la magnitud de la seua part imaginaria (Robertson, 1929), és a dir:

$$\left|\langle\psi|\hat{A}\hat{E}|\psi\rangle\right|^2 \geq \left|\frac{1}{2i}\langle\psi|[\hat{A},\hat{E}]|\psi\rangle\right|^2 \qquad (2.16)$$

on $\langle\psi|\boldsymbol{X}|\psi\rangle$ és el valor esperat de $\boldsymbol{X}$ en l'espai d'estats $|\psi\rangle$, mentre que $[\hat{\boldsymbol{A}}, \hat{\boldsymbol{E}}] \equiv \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{E}} - \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{E}}$ és el commutador, que també és igual a $[\hat{\boldsymbol{A}}, \hat{\boldsymbol{E}}] = [\hat{\boldsymbol{A}} - \langle\psi|\hat{\boldsymbol{A}}|\psi\rangle,\ \hat{\boldsymbol{E}} - \langle\psi\, \hat{\boldsymbol{E}}|\psi\rangle]$, mentre que $\langle\psi|\boldsymbol{X}|\psi\rangle$ és el valor esperar de $\boldsymbol{X}$ en l'espai d'estats $|\psi\rangle$. Per tant, la desviació estàndard dels observables $\hat{\boldsymbol{A}}$ i $\hat{\boldsymbol{E}}$ satisfan que:

$$\Delta\hat{A}\cdot\Delta\hat{E} \geq -\tfrac{1}{2} i \langle\psi|[\hat{A},\hat{E}]|\psi\rangle \qquad (2.17)$$

Per exemple, si definim l'operador moment-energia com $\hat{p}^{\alpha} \equiv i\partial^{\alpha}$, actuant sobre qualsevol estat $|\psi\rangle$ aleshores es fàcil demostrar que:

$$\Delta\hat{p}^{\alpha}\Delta\hat{x}^{\alpha} \geq \tfrac{1}{2} \qquad (2.18)$$

Si no fem cap mesura, aleshores podem prendre les desviacions mínimes:

$$\Delta\hat{p}^{\alpha}\Delta\hat{x}^{\alpha} = \tfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \Delta\hat{p}^{0}\Delta\hat{x}^{0} = \tfrac{1}{2} \tag{2.19}$$

Si ara apliquem els operadors sobre un hipotètic estat de l'univers $\Psi(T)$ en l'instant mínim de temps, aleshores la amplitud mínima del moment-energia en aquell instant inicial és:

$$\Delta\hat{p}^{0}(\Delta x^{0}{}_{\min}) = \frac{1}{2\Delta x^{0}{}_{\min}} = \frac{1}{2\tau_{o}} \tag{2.20}$$

Aquesta és doncs, per definició, l'energia o massa total de l'univers (M_U) que es propaga des de l'instant τ_o. En unitats del sistema internacional, tenim que:

$$M_{U} \equiv \Delta\hat{p}^{0}(\Delta x^{0}{}_{\min}) = \frac{\hbar}{2\tau_{o}} \tag{2.21}$$

En general, la desviació màxima d'una component espacial és $\Delta x^0{}_{\max} = \Delta n^0 \tau_o = T = n^0 \tau_o$. Per tant, la desviació mínima associada, $\Delta p^0{}_{\min}$, és:

$$\Delta\hat{p}^{0}(\Delta x^{0}{}_{\max}) = \frac{1}{2\Delta x^{0}} = \frac{1}{2\tau_{o}n^{0}} = \frac{M_{U}}{n^{0}} \equiv \tilde{m}_{o}(n^{0}) \tag{2.22}$$

on $\tilde{m}_o$ és l'energia mínima mesurable de l'univers, i per tant el quantum d'espaitemps-energia.

2.3 Densitat de l'univers

Segons el model proposat, el volum (3D) de l'univers és $2\pi^2 T_o^3$, per tant la densitat mitjana de l'energia de l'univers és:

$$\rho_{o} \equiv \frac{M_{U}}{\Omega T_{o}^{3}} \tag{2.23}$$

on $\Omega \equiv 2\pi^2$, i M_U és la massa total de l'univers. Suposant que la densitat es troba repartida de forma uniforme a l'univers, aleshores podem definir una massa M_γ tancada en un volum de radi igual a l'arc $D = \gamma/T_o$, com:

$$M_{\gamma}(D) \equiv \rho_{o}\omega_{\gamma}D^{3} \tag{2.24}$$

on $\omega_\gamma \equiv 2\pi(\gamma - \sin\gamma \cdot \cos\gamma)\cdot\gamma^{-3}$ és l'angle volumètric associat a l'angle γ, respecte un determinat sistema de referència (veure apèndix 6.1).

D'altra banda, la densitat lineal μ de l'energia de l'univers, M_U, es defineix com el quocient entre l'energia i l'edat de l'univers T_o, és a dir:

$$\mu \equiv \frac{M_{U}}{T_{o}} = \frac{\tilde{m}_{o}}{\tau_{o}} \tag{2.25}$$

Amb això podem rescriure l'equació 2.23 segons:

$$\rho_{o} = \frac{\mu}{\Omega T_{o}^{2}} \tag{2.26}$$

2.4 Aproximació d'univers heterogeni

Suposant que, per una determinada raó, en un moment T_o un nombre de punts n_M d'energia $\tilde{m}_o$ aconsegueixen formar un cúmul d'energia $M = n_M \tau_o$, aleshores podem definir un temps format per la suma de la longitud de tots els punts, és a dir $T_M = n_M \tau_o$. D'aquesta manera, la densitat lineal és la mateixa que la de l'univers en T_o, és a dir μ. De fet, aplicant l'equació 2.25 i 2.22, veiem que:

$$\mu = \frac{M_U}{T_o} = \frac{n_o \tilde{m}_o}{n_o \tau_o} = \frac{n_M \tilde{m}_o}{n_M \tau_o} = \frac{M}{T_M} \tag{2.27}$$

Aleshores, el temps T_M representa el radi de curvatura d'un hipotètic micro-univers amb la mateixa densitat lineal μ que l'univers, i amb una massa-energia M que es troba repartida uniformement en l'espai d'aqueix micro-univers, és a dir, amb densitat ρ_M constant, i major que la de l'univers, ρ_o. No obstant la densitat del cúmul no sempre es constant en l'espai.

Tant si el cúmul es troba confinat o no en una esfera de radi R, per a qualsevol arc espacial D podem definir una densitat mitjana d'aqueix cúmul, ρ_D, que en general no serà constant (diferent de ρ_M). Així doncs, aqueixa densitat ve donada por el quocient entre l'energia, $m(D) \leq M$, tancada pel volum simètric de l'arc D, i aqueix volum, és a dir:

$$\rho_D(D) \equiv \frac{m(D)}{\omega_\gamma D^3} \tag{2.28}$$

Recordem que existeix una relació entre la curvatura de l'univers, T_o, i la densitat mitjana, ρ_o, que ve donada per l'equació 2.26, i per tant:

$$T_o = \sqrt{\frac{\mu}{\Omega \rho_o}} \tag{2.29}$$

Aleshores, fem la hipòtesis que per a estudiar el comportament del cúmul de punts podem prendre un radi de curvatura T_r associat a la densitat mitjana ρ_D (D), de tal manera que en el límit quan ρ_D (D) $\rightarrow \rho_o$ recuperem que $T_r \rightarrow T_o$, per tant necessàriament definim:

$$T_r \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\Omega \rho_D}} \tag{2.30}$$

Veiem que, en el cas que la densitat mitjana del cúmul ρ_D siga constant amb la distància (ρ_D (D) = ρ_M), aleshores s'obté que la curvatura T_r també és constant i igual a T_M. Per mostrar-ho, podem aplicar que la densitat (constant) del cúmul satisfà doncs l'equació 2.23, amb energia M del micro-univers; i per tant, es comprova que:

$$Si \quad \rho_D(D) = \rho_M \equiv \frac{M}{\Omega {T_M}^3} \qquad \longrightarrow \qquad T_r = \sqrt{\frac{\Omega {T_M}^3 \mu}{\Omega M}} = T_M \tag{2.31}$$

3 Resultats

3.1 Obtenció del diferencial de l'espai-temps

A partir de l'equació 2.11, podem calcular l'element de línia de l'univers, vist des del nostre sistema de referència, W, i per tant, equivalent al diferencial vist des de qualsevol punt en expansió. Segons l'equació 2.11, l'element de línia ds pot escriure's com:

$$ds = \left(dt, \quad \frac{T}{T_o} d\vec{r}\,' + \frac{dt}{T_o} \vec{r}\,', \quad -dt \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r'^2}{{T_o}^2}} \right) + \frac{T}{T_o} dr' \left(\frac{r'}{T_o} \right) \left(1 - \frac{r'^2}{{T_o}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \tag{3.1}$$

on r' són les coordenades comòbils en l'espai XYZ (equació 2.10). I per tant, l'escalar del diferencial és:

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{T}{T_o}\right)^2 d\vec{r}\,'^2 \quad - \left(\frac{\vec{r}\,'}{T_o}\right)^2 dt^2 - 2\left(\frac{T}{T_o}\right)\left(\frac{\vec{r}\,'}{T_o}\right) dt d\vec{r}\,' \quad - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}}\right)^2 dt^2 -$$

$$- \left(\frac{T}{T_o}\right)^2 \frac{\left(\frac{r'}{T_o}\right)^2}{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}} dr'^2 \quad - \quad 2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}}\right)\left(\frac{T}{T_o}\right) \frac{\frac{r'}{T_o}}{\sqrt{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}}} dt dr' \tag{3.2}$$

operant el quadrat del cinquè terme de la dreta de la igualtat:

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{T}{T_o}\right)^2 d\vec{r}\,'^2 \quad - \left(\frac{\vec{r}\,'}{T_o}\right)^2 dt^2 - 2\left(\frac{T}{T_o}\right)\left(\frac{1}{T_o}\right) dt \overbrace{\vec{r}\,' d\vec{r}\,'}^{r'dr'} - \left(-\frac{r'^2}{T_o^{\,2}} + 2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}}\right)\right) dt^2$$

$$- \left(\frac{T}{T_o}\right)^2 \frac{\left(\frac{r'}{T_o}\right)^2}{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}} dr'^2 \quad - \quad 2\left(\frac{T}{T_o}\right)\frac{r'}{T_o}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}}} - 1\right) dt dr' \tag{3.3}$$

i finalment, agrupant termes:

$$ds^2 = dt^2\left(2\sqrt{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}} - 1\right) \quad - \quad \left(\frac{T}{T_o}\right)^2 \left[\frac{dr'^2}{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}} + r'^2\, d\Omega^2\right] \quad - \quad 2\left(\frac{T}{T_o}\right)\left(\frac{r'}{T_o}\right)\frac{dr dt}{\sqrt{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}}} \tag{3.4}$$

Per a moviments en els que no canvia l'angle, d$\Omega = 0$, aleshores, podem escriure que:

$$ds^2 = dt^2\left(2\sqrt{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}} - 1\right) \quad - \quad \left(\frac{T}{T_o}\right)^2 \frac{dx_i' dx_i'}{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}} \quad - \quad 2\left(\frac{T x_i}{T_o^{\,2}}\right)\frac{dt \cdot dx_i'}{\sqrt{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}}} \tag{3.5}$$

Aquesta és doncs l'escalar del diferencial de línia per a regions petites de l'univers. Aleshores veiem que els elements del tensor *g*, donats per l'equació 2.13 i 2.14 són:

$$g_{00} = \left(2\sqrt{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}} - 1\right), \quad g_{ii} = -\left(\frac{T}{T_o}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}}, \quad g_{0i} = -\left(\frac{T}{T_o}\right)\left(\frac{x_i'}{T_o}\right)\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}}} \tag{3.6}$$

A més a més, si la distància és molt més petita que el temps (equació 2.7), aleshores podem aproximar, segons el desenvolupament de Taylor:

$$g_{00} \approx \left(1 - \left(\frac{\vec{r}\,'}{T_o}\right)^2\right), \quad g_{ii} \approx -\left(\frac{T}{T_o}\right)^2\left(1 + \left(\frac{x_i'}{T_o}\right)^2\right), \quad g_{0i} \approx -\left(\frac{T}{T_o}\right)\left(\frac{x_i'}{T_o}\right) \tag{3.7}$$

Prenent les equacions 3.6, el diferencial d'espai *dl* és (Wald, 1984):

$$d\ell^2 = \left(g_{ii} - \frac{g_{0i}^{\ 2}}{g_{00}}\right) dx_i^{\,2} = -\left(\frac{T}{T_o}\right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{r'}{T_o}\right)^2}\left(1 + \frac{\left(\frac{x_i'}{T_o}\right)^2}{\left(2\sqrt{1 - \frac{r'^2}{T_o^{\,2}}} - 1\right)}\right) dx_i^{\,2} \tag{3.8}$$

i aproximant de nou pel desenvolupament de Taylor:

$$d\ell^2 \approx -\left(\frac{T}{T_o}\right)^2 \left[1+2\left(\frac{r'}{T_o}\right)^2\right] dx_i^{\,2} \qquad (3.9)$$

Aquestes són les equacions d'un univers inflacionari amb un creixement constant en funció del temps de l'univers, *T*. A més s'observa que l'univers té curvatura positiva segons la mètrica de Robertson-Walker (Wald, 1984), i localment és pla ($k \approx 2/T_o^2 \approx 0$).

$$ds^2 \approx dt^2 - \left(\frac{T}{T_o}\right)^2 \left(\frac{dr'^2}{1-kr'^2} + r'^2\, d\Omega^2\right) \;\rightarrow\; k \approx \frac{2}{T_o^{\,2}} \qquad (3.10)$$

3.2 Obtenció i variació de G

Amb l'aproximació del tensor mètric de l'equació 3.7 i fent el canvi de variables entre la distància *r'* i l'arc *D*, podem escriure que:

$$g_{00} \approx 1-\left(\frac{r'}{T_o}\right)^2 = 1-\left(\frac{D}{T_o}\right)^2 \frac{T_o^{\,2}\sin^2\gamma}{T_o^{\,2}\gamma^2} = 1-\left(\frac{D}{T_o}\right)^3 \frac{T_o}{D}\frac{\sin^2\gamma}{\gamma^2} \qquad (3.11)$$

Tenint en compte les definicions corresponents a les expressions 2.23 i 2.24, s'obté que:

$$g_{00} \approx 1-\frac{\Omega}{\omega_\gamma}\frac{M_\gamma(D)}{M_U}\frac{T_o}{D}\frac{\sin^2\gamma}{\gamma^2} \qquad (3.12)$$

Finalment, amb la definició de la densitat lineal (equació 2.25), podem escriure:

$$g_{00} \approx 1-\frac{M_\gamma(D)}{D}\left(\frac{\Omega\sin^2\gamma}{\omega_\gamma\gamma^2\mu}\right) \qquad (3.13)$$

on *r'* és el mòdul del vector espacial ordinari (*x'*, *y'*, *z'*), comòbil a l'univers. Recordem que l'element mètric g_{oo} aporta informació sobre l'efectivitat del mòdul del temps *T*, quan s'hi fa un producte escalar (Wald, 1984); aleshores podem entendre'l com una mena de "densitat de temps" en una certa regió de l'espai. Així doncs, veiem que la densitat lineal aparent μ_γ es comporta com un factor normalitzador d'aqueixa "densitat de temps".

A partir de l'expressió 3.13 es dedueix que a mesura que observem amb un arc *D* més gran, l'element g_{oo} augmenta amb el quadrat de *D*, a pesar que l'energia tancada per *D* augmenta a raó del cub.

D'altra banda, si considerem l'aproximació d'univers heterogeni, podem veure que generalment la curvatura pròpia del cúmul seguirà el mateix desenvolupament matemàtic que el conjunt de l'univers (des de 3.1 a 3.7). Per la qual cosa, tenint en compte les equacions 2.30 i 2.28, obtenim que:

$$g_{00} \approx 1-\left(\frac{r'}{T_r}\right)^2 = 1-\frac{\rho_D\Omega D^2}{\mu}\frac{\sin^2\gamma}{\gamma^2} = 1-\frac{m(D)}{D}\left(\frac{\Omega\sin^2\gamma}{\omega_\gamma\gamma^2\mu}\right) \qquad (3.14)$$

on *r'* és la posició radial comòbil respecte al centre del cúmul. En conseqüència, hi ha diferència respecte l'equació 3.13, i és que ara l'element g_{00} fa referència a la densitat de temps per al cúmul en concret i no per a l'univers en general. I donat que la densitat ρ_r és major que ρ_o, aleshores la curvatura associada també ho és (el radi T_r és menor que T_o).

D'ara en davant, per comoditat definim el paràmetre gravitacional $G_\gamma = G_\gamma(\gamma, \mu)$ com:

$$G_\gamma \equiv \frac{\Omega\sin^2\gamma}{2\omega_\gamma\gamma^2\mu} \qquad (3.15)$$

on $\Omega = 2\pi^2$, $\omega_\gamma = 2\pi(\gamma - \sin\gamma \cdot \cos\gamma)\cdot\gamma^{-3}$ i γ és l'angle en la component u d'un punt respecte el centre del cúmul. Amb la qual cosa, l'equació 3.14 queda com:

$$g_{00} \approx 1 - \frac{2G_\gamma m(D)}{D} \qquad (3.16)$$

on veiem que localment (per a γ= 0) G_γ és tracta de la "constant de la gravitació de Newton" (Weinberg, 1972; Wald, 1984), que concretament val:

$$G_o = \frac{3\pi}{4\mu_o} \qquad (3.17)$$

Així, el paràmetre gravitacional G_γ es pot escriure en funció de G_o com:

$$G_\gamma = \frac{4\gamma \sin^2\gamma}{6(\gamma - \sin\gamma \cdot \cos\gamma)} G_o \approx \left(1 - \frac{\gamma^2}{7,5}\right) G_o \qquad (3.18)$$

En l'equació 3.17 veiem que la 'constant gravitacional' G_o depèn de la densitat lineal d'energia, μ_o, i aquesta no és una constant, sinó que disminueix amb el temps, o dit d'una altra forma, G_o augmenta. Sabent que l'edat de l'univers és T_o = (1,373 ± 0.012)· 10^{10} anys (Hinshaw *et al.*, 2009), podem estimar el canvi relatiu de G_o, que ve donat per:

$$G_o = \frac{3\pi}{4}\frac{T_o}{M_U} \longrightarrow \frac{1}{G_o}\frac{\partial G_o}{\partial T_o} = \frac{1}{T_o} \approx 7{,}3 \cdot 10^{-11} any^{-1} \qquad (3.19)$$

D'altra banda, per distàncies comòbils *r'* del mateix ordre que T_r, l'aproximació 3.14 no és vàlida, sinó que cal emprar l'equació 3.6. Per tant, l'element g_{oo} del tensor mètric és:

$$g_{00} = \left(2\sqrt{1 - \frac{r'^2}{T_r^2}} - 1\right) = \left(2\sqrt{1 - \frac{2G_\gamma m(D)}{D}} - 1\right) \qquad (3.20)$$

4 Discussió

4.1 Expansió de l'univers

En cosmologia, la llei de Hubble relaciona la velocitat d'un objecte comòbil a l'univers i la seua distància a l'observador mitjançant una pendent anomenada paràmetre de Hubble, H_o (Liddle, 2003). El model proposat en aquest treball descriu un univers que presenta una expansió lineal amb el temps (equació 2.2).

De fet, de l'equació 2.9 i posteriors és dedueix que l'expansió es proporcional a la inversa de l'edat de l'univers. Per tant, en aquest cas hem obtingut que el paràmetre de Hubble és H_o = 1/T_o. Sabent que l'edat de l'univers és T_o = (1,373 ± 0.012)· 10^{10} anys (Hinshaw *et al.*, 2009), aleshores, el paràmetre de Hubble que deduïm és 71,3 ± 0,6 km·s^{-1}·Mpc^{-1} la qual cosa és consistent amb les observacions: recentment s'han mesurat valors al voltant de 71 ± 4 km·s^{-1}·Mpc^{-1} (Spergel *et al.*, 2003; Tegmark *et al.*, 2004) i 70 ± 3 km·s^{-1}·Mpc^{-1} (Spergel *et al.*, 2007).

Aquests resultats impliquen que la velocitat d'expansió és igual a la de la llum (o molt pròxima), en contraposició al que proposen altres autors, els que parlen d'una expansió accelerada (Riess *et al.*, 1998; Tegmark *et al.*, 2004; Szabó *et al.*, 2007; Kowalski *et al.*, 2008, Komatsu *et al.*, 2009). No obstant, en aqueixos treballs apareixen "distàncies lumíniques" que en alguns són casos majors que l'edat de l'univers; la qual cosa és impossible suposant que la velocitat de la llum haja estat constant, ja que la informació no pot viatjar més enllà que la velocitat de la llum (Wald, 1984; i apèndix B). És possible que el càlcul de les distàncies s'haja d'efectuar tenint en compte una possible variació de la "constant gravitatòria" (Gaztañaga *et al.*, 2001).

El model que proposem descriu una curvatura positiva (equació 3.10) que localment és aproximable a zero, és a dir, l'univers és localment pla, la qual cosa és compatible amb les observacions (Spergel et al., 2007). Concretament hem obtingut que localment val:

$$k \approx \frac{2}{T_o^{\,2}} \approx 1{,}07 \cdot 10^{-20}\, anys \cdot llum^{-2} \tag{4.1}$$

on k és la curvatura local i T_o és l'edat de l'univers.

D'altra banda, segons les observacions del dipol de la radiació còsmica de fons (Smoot, 1992), sembla que existeix un marc de referència en repòs absolut (Cahill i Kitto, 2003; Múnera, 2009). Per la qual cosa, podem dir que la Terra està movent-se a uns 370 ± 20 km/s respecte a la radiació de fons. És a dir, podem construir un sistema de referència amb uns eixos de coordenades definits amb repòs (segons la radiació de fons). Aqueix sistema de coordenades 4D és perfectament compatible amb el nostre model de globus cosmològic. La radiació de fons representa en certa manera la superfície del globus en expansió, i la direcció radial del globus (el temps) representa la direcció de les trajectòries dels punts amb repòs. Amb això, la nostra galàxia està movent-se amb una component "tangencial" respecte a aqueixes trajectòries del repòs.

4.2 Densitat i massa de l'univers

La 'constant gravitacional', G_o, fou introduïda per primera vegada per Newton en 1687, i actualment es coneix empíricament el valor que és aproximadament $6{,}674 \cdot 10^{-11}$ (Mohr *et al.*, 2005; Fixler *et al.* 2007). Aqueix valor ens serveix per estimar l'energia total de l'univers així com la densitat mitjana, segons les equacions 2.26, 3.17 i 2.23, amb $\Omega = 2\pi^2$:

$$\rho_o = \frac{3}{8\pi G_o T_o^{\,2}} = \frac{M_U}{\Omega T_o^{\,3}} \tag{4.2}$$

Tenint en compte la transformació de les coordenades naturals ($c = 1 = \hbar$) a les del sistema internacional, i prenent el valor empíric de l'edat de l'univers com $13{,}7 \cdot 10^9$ anys, obtenim que:

$$M_U = \frac{3\Omega}{8\pi G_o} T_o = \frac{6\pi^2 c^3}{8\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} (\tfrac{kg}{s})(13{,}7 \cdot 10^9\, a)(365\, \tfrac{d}{a})(24\, \tfrac{h}{d})(3600\, \tfrac{s}{h}) = 4{,}10 \cdot 10^{53}\, kg \tag{4.3}$$

A més, a partir de l'equació 4.2 obtenim que la densitat de l'univers és:

$$\rho_o = \frac{3}{8\pi G_o T_o^{\,2}} = 9{,}60 \cdot 10^{-27}\, kg \cdot m^{-3} \tag{4.4}$$

Aquesta densitat mitjana es correspon amb el que en la bibliografia s'anomena densitat crítica, $\rho_c = 9{,}4 \pm 0{,}8 \cdot 10^{-27}\ kg \cdot m^{-3}$ (Tegmark, 2004; Spergel, 2007), de fet, el valor observat de la densitat mitjana de l'univers (relatiu a la densitat crítica) és 1,0050 ± 0,0060 (Hinshaw *et al.*, 2009), i per la qual cosa hi ha un bon acord entre teoria i observació.

4.3 Variació de la 'constant gravitacional'

En aquest treball em vist que cal esperar un canvi relatiu de G_o, de l'ordre de $7{,}3 \cdot 10^{-11}$. Doncs aquest valor és compatible amb les observacions experimentals, ja que s'ha mesurat que la variació relativa de G es troba probablement entre l'ordre de 10^{-10} any^{-1} i 10^{-12} any^{-1} (Taula 1), però el signe depèn principalment de si es mesura en una zona fixa (per exemple en el sistema solar) o de si es mesura per a diferents distàncies de l'univers (per exemple *pulsars*, nanes blanques, etc.). En el primer cas, la variació relativa de G és positiva (Reasenberg i Shapiro 1978, Williams *et al.*, 1996; Müller i Biskupek, 2007), i en el segon cas sembla ser majoritàriament negativa (Kaspi *et al.*, 1994; García-Berro, 1995; Bisnovatyi-Kogan, 2006), però aquestes últimes mesures tenen en general menys precisió.

Taula 1. Variació relativa de *G*, mesurada localment (sistema solar) i cosmològicament. Primer es mostren els estudis que mesuren un augment i després els que mostren una disminució.

$G^{-1}dG/dt$ (any^{-1})	Autors	Metodologia
$(2 \pm 7) \cdot 10^{-12}$	Müller i Biskupek (2007)	Acceleració lunar, amb làser
$\leq 1.6 \cdot 10^{-12}$	Guenther *et al.* (1998)	Heliosismologia
$\sim 8 \cdot 10^{-12}$	Williams *et al.* (1996)	Acceleració lunar, amb làser
$\sim 10^{-11}$	Krauss i White (1992)	Lents gravitatòries
$\sim 10^{-11}$	Sisterna i Vucetich (1991, 1994)	Evidències paleontològiques
$(0 \pm 2) \cdot 10^{-12}$	Anderson *et al.* (1991)	Acceleració planetària, amb radar
$(0{,}2 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-11}$	Hellings *et al.* (1989)	Acceleració planetària, amb radar
$(1{,}6 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-11}$	Van Flandern (1981)*	Acceleració lunar, amb làser
$(2 \pm 4) \cdot 10^{-12}$	Hellings *et al.* (1983)	Evolució solar
$\sim 1.5 \cdot 10^{-10}$	Anderson *et al.* (1978)	Acceleració planetària, amb radar
$(6{,}2 \pm 3{,}3) \cdot 10^{-10}$	Reasenberg i Shapiro (1978)	Acceleració planetària, amb radar
$\sim 3 \cdot 10^{-11}$	Williams et al. (1978)	Acceleració lunar, amb làser
$\leq 1 \cdot 10^{-10}$	Chin i Stothers (1976)	Evolució solar
$(5 \pm 1)\ 10^{-11}$	Dearborn i Schramm (1974)	Estabilitat de *clusters* galàctics
$\sim 4 \cdot 10^{-11}$	Morrison (1973)	Evolució lunar, eclipsi
$\sim 4 \cdot 10^{-10}$	Shapiro *et al.* (1971)	Acceleració planetària, amb radar
$(0{,}6 \pm 2) \cdot 10^{-12}$	Bisnovatyi-Kogan (2006)	Sistemes *pulsar*
$\geq -4{,}1 \cdot 10^{-10}$	Biesiada i Malec (2004)	Sistemes *pulsar*
$\geq -1 \cdot 10^{-11}$	Gaztañaga *et al.* (2001)	Lluminositat Supernova Ia
$-(1{,}4 \pm 2{,}1) \cdot 10^{-11}$	Degl'Innocenti *et al.* (1996)	*Clusters* globulars
$-(0{,}6 \pm 4{,}2) \cdot 10^{-12}$	Thorsett (1996)	Massa d'estrelles de neutrons
$-(1 \pm 1) \cdot 10^{-11}$	García-Berro (1995)	Nanes blanques, (C/O) estratificat
$-(3 \pm 3) \cdot 10^{-11}$	García-Berro (1995)	Nanes blanques, no-estratificat
$-(9 + 18) \cdot 10^{-12}$	Kaspi *et al.* (1994)	Sistemes *pulsar*
$-(1{,}1 \pm 1{,}1) \cdot 10^{-11}$	Damour i Gundlach, (1991)	Sistemes *pulsar*
$\geq -1 \cdot 10^{-12}$	Wang (1991)	Lluminositat solar
$\geq -8 \cdot 10^{-12}$	McElhinny *et al.* (1978)	Planetes i creació tipus Dirac

La teoria de cordes és compatible amb valors negatius, concretament $G^{-1}dG/dt = -1 \cdot 10^{-11 \pm 1}$ any^{-1} (Wu i Wang, 1986), la qual cosa implicaria una creació d'energia (Dirac, 1936, 1975). Això és el que assumeixen alguns autors com McElhinny *et al.* (1978) i Van Flandern (1981) per a explicar l'acceleració planetària, evitant assumir com positiva la variació $G^{-1}dG/dt$.

De fet, en la majoria dels treballs on es mesura que $G^{-1}dG/dt$ és negativa s'assumeix *a priori* que ho és (basant-se en Dirac, 1938) i per tant en alguns casos s'està buscant un "límit superior" negatiu, deixant a banda la possibilitat de que el valor siga positiu. A més a més, cal tenir en compte que per a mesures fetes cada cop a una escala cosmològica més gran, el paràmetre G_γ és cada cop més petit (equació 3.18), la qual cosa pot fer que fa semblar una disminució relativa de G_γ.

Segons la Taula 1, les millors estimacions de la variació relativa de G són: $(6{,}2 \pm 3{,}3) \cdot 10^{-10}$ any^{-1} (Reasenberg i Shapiro, 1978), $(5 \pm 1) \cdot 10^{-11}$ any^{-1} (Dearborn i Schramm, 1974), i $(1{,}6 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-11}$ any^{-1} (Van Flandern, 1981) en el cas (*) de que es suposa que no hi ha creació de Dirac. És a dir, sembla més probable que la variació relativa de *G* siga positiva que no pas negativa.

Per totes aqueixes raons, per a fer la mitjana dels valors observats, descartarem les mesures negatives. Amb això, obtenim que la mitjana observada amb un interval de confiança del 95% és $G^{-1}dG/dt = (6 \pm 5)\cdot 10^{-11}$ any^{-1}. Aquest valor mostra que el model és compatible amb les observacions.

4.4 Temps i energia mínims

D'altra banda, recordem que per la hipòtesi inicial, existeix un interval mínim de temps τ_o que quànticament està relacionat amb la massa de l'univers, segons l'equació 2.21, que recordem és:

$$M_U \tau_o = \tfrac{1}{2} \tag{4.5}$$

A més a més, tenint en compte l'equació 3.17, i fent el canvi d'unitats naturals ($\hbar = 1 = c$) al Sistema Internacional d'unitats, obtenim que:

$$\tau_o = \frac{4\hbar G_o}{6\pi T_o c^2} = 1{,}4\cdot 10^{-105}\,segons = 4{,}3\cdot 10^{-97}\,metres \tag{4.6}$$

on l'error dels valors és del 10%. De la mateixa manera, segons l'equació 2.22 podem obtindre l'energia mínima de l'univers $\tilde{m}_o$, és a dir:

$$\tilde{m}_o T_o = \tfrac{1}{2} \tag{4.7}$$

Fent el canvi d'unitats al Sistema Internacional, s'obté:

$$\tilde{m}_o(T_o) = \frac{\hbar}{2T_o} = (1{,}36 \pm 0{,}01)\cdot 10^{-67}\,kg \tag{4.8}$$

Aquesta és doncs la massa mínima mesurable i per tant pot considerar-se com la massa en repòs de l'espai-temps, o del fotó. Podem observar que aquest valor està molt lluny del límit superior observat per al fotó, que és $<10^{-52}$ kg (Eidelman *et al.*, 2004).

4.5 Singularitat de la mètrica

En l'equació 3.20, veiem que l'element g_{oo} pot anul·lar-se en certes condicions. Si l'energia total *M* es troba concentrada en un radi $R \le D$ suficientment menut, aleshores l'energia a la distància D també serà $m(D) = M$, i l'element g_{oo} s'anul·larà a una certa distància D_o, però no en el radi d' Schwarzschild (1916a i 1916b), que val $r_M \equiv 2G_o M$, sinó amb un factor 4/3:

$$g_{00} = 0 \;\leftrightarrow\; 1 - \frac{r_M}{D_o} = \frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad D_o = \frac{4}{3} r_M \tag{4.9}$$

Cal destacar que l'element g_{oo} presenta valors teòrics per un rang de distàncies compreses entre $4r_M/3$ i r_M, on a més són de signe canviat (densitat de temps negativa). La interpretació d'aquest resultat pot donar lloc a diverses especulacions sobre viatges en el temps, però cal tindre en compte que el radi d'Schwarzschild suposa una barrera física difícil de sobrepassar (ja que la densitat del temps és zero).

5 Conclussions

L'univers pot descriure's amb 5 dimensions i una condició de lligament que implica una connexió addicional entre espai i temps. Tot succeeix com si les nostres observacions fixaren artificialment un instant de referència, i per tant, es tractaria d'un punt que no existeix a l'univers. Amb tot això es desprèn que l'expansió i el pas del temps són fenòmens equivalents, ja que la velocitat d'expansió és la mateixa que la velocitat del temps, la llum (c ≡ 1). Per tant, el paràmetre de Hubble és igual a la inversa de l'edat de l'univers, $H_o = 1/T_o = 71{,}3 \pm 0{,}6$ km·s^{-1}·Mpc^{-1}, la qual cosa és consistent amb les observacions més recents.

Amb la hipòtesi addicional de l'existència d'un interval de temps mínim (quantum de temps, igual a $1{,}4 \cdot 10^{-105}$s), hem pogut estimar un valor teòric per a l'energia de l'univers $M_U = 4{,}10 \cdot 10^{53}$ Kg que determina un valor mitjà de densitat energètica $\rho_o = \rho_c = 9{,}60 \cdot 10^{-27}$ kg·m^{-3}, consistent amb el valor relatiu observat (1,005 ± 0.006 vegades la densitat crítica, ρ_c).

A més, aquest model explica que la "constant gravitacional", G, ve donada per la inversa de la densitat lineal de l'energia de l'univers, i per tant, prediu que és dependent de l'edat de l'univers. Concretament, la variació relativa de G és aproximadament la inversa de l'edat actual. El valor predit de la variació relativa ($G^{-1}dG/dt = 7{,}3 \cdot 10^{-11}$ any^{-1}.) és compatible amb les observacions: $G^{-1}dG/dt = (6 \pm 5) \cdot 10^{-11}$ any^{-1}.

D'altra banda, a partir de la relació entre G i la densitat energètica de l'univers es dedueix un límit inferior de la mesura de la massa-energia, i per tant podem pensar que es tracta d'un valor teòric relacionat amb la massa en repòs del fotó. Aqueix límit depèn de l'edat de l'univers, i per al present s'estima que és $(1{,}36 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-67}$ *kg*.

Per últim cal destacar que la curvatura de l'univers i la curvatura de la gravitació poden ser descrites per una mateixa geometria d'hiperesferes, segons el model senzill proposat. La gravitació pot entendre's com una deformació local de la curvatura de l'univers en relació a la dimensió espacial extra, però en qualsevol cas a escala cosmològica la curvatura de l'univers sols depèn de l'edat, i no de la gravitació, sinó més bé al contrari: el paràmetre de la gravitació, G, depèn de la curvatura de l'univers.

Apèndixs

A Angle sòlid volumètric

Prenent coordenades hiperesfèriques, podem calcular el volum (V) corresponent a l'univers (hipersuperfície). Per tant, fem el canvi de coordenades segons:

$$\begin{cases} u = T \cdot \cos\gamma \\ z = T \cdot \sin\gamma \cdot \cos\alpha \\ x = T \cdot \sin\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ y = T \cdot \sin\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \end{cases} \tag{A.1}$$

on T és l'edat de l'univers, que fa de radi, mentre que α, β i γ són els angles d'un punt de la hiperesfera. Amb el sistema d'equacions A.1, identifiquem que l'espai ordinari és $r \equiv \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = T \cdot \sin\gamma$, mentre que l'arc espacial, D, sobre l'univers és $D \equiv T \cdot \gamma$. Amb la corresponent transformació de coordenades associada al sistema d'equacions A.1, el diferencial de volum, dV, queda com:

$$dV = T^3 \cdot \sin^2\gamma \cdot \sin\alpha \cdot d\gamma \cdot d\alpha \cdot d\beta \tag{A.2}$$

on el domini de la triple integral va des de 0 a 2π per a β, de π a 0 per a α i de 0 a π per a γ. Amb això podem calcular el volum $V(\gamma)$ tancat per un angle γ com:

$$V(\gamma) = \iiint dV = T^3 \cdot \frac{1}{2}(\gamma - \sin\gamma \cdot \cos\gamma)\Big|_0^\gamma \cos\alpha\Big|_\pi^0 \cdot \beta\Big|_0^{2\pi} \tag{A.3}$$

$$V(\gamma) = T^3 \cdot 2\pi(\gamma - \sin\gamma \cdot \cos\gamma) \tag{A.4}$$

D'altra banda, definim localment l'angle sòlid volumètric, ω_γ, segons la relació entre el volum i el cub de l'arc de distància D, és a dir:

$$\omega_\gamma \equiv \frac{V(\gamma)}{D^3} = 2\pi(\gamma - \sin\gamma \cdot \cos\gamma)\ \gamma^{-3} \tag{A.5}$$

Amb aqueixa definició, és fàcil comprovar que en el límit satisfà que:

$$\lim_{\gamma\to 0} \omega_\gamma = \frac{4}{3}\pi \equiv \omega_o \tag{A.6}$$

B Dilatació del temps i velocitat màxima

Segons l'equació 2.6, el vector posició s expressat en funció del temps t, i la posició ordinària $\boldsymbol{r}$ és:

$$s = (t,\ \ \vec{r},\ \ u_s) \tag{B.1}$$

on u_s és la component u del vector s, que val:

$$u_s = -T\left(1 - \sqrt{1 - r^2/T^2}\right) \tag{B.2}$$

on T és l'edat de l'univers. Per tant, el diferencial de la posició és:

$$ds = (dt,\ \ \vec{v}dt,\ \ \dot{u}_s dt) \tag{B.3}$$

on $\dot{u}_s$ és la derivada respecte del temps de la component u del vector posició s, que segons es deriva de l'equació B.2, és una funció de la posició ordinària r, l'edat de l'univers T i la velocitat ordinària, v, segons:

$$\dot{u}_s \equiv \frac{du_s}{dt} = 1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{T^2}} - \frac{1}{1 - \sqrt{1 - r^2/T^2}}\frac{r}{T}\left(v - \frac{r}{T}\right) \tag{B.4}$$

Una aproximació de $\dot{u}_s$ és:

$$\dot{u}_s \approx \frac{r^2}{2T^2} + \left(1 + \frac{r^2}{2T^2}\right)\frac{r}{T}\left(v - \frac{r}{T}\right) \approx -\frac{r^2}{2T^2} + \frac{r}{T}v \tag{B.5}$$

Amb l'equació B.1 podem definir el diferencial de temps propi *dt'* com aquell interval de temps mesurat en un sistema on la velocitat ordinària v i la posició r són zero, és a dir:

$$ds' = (dt',\ \ 0,\ \ 0) \tag{B.6}$$

on *ds'* és el diferencial de posició mesurat en aqueix sistema de referència. Lògicament, la longitud ds'^2 deu ser igual a ds^2, per tant, el temps propi *dt'* es troba relacionat amb el temps *dt* segons:

$$dt'^2 = dt^2\left(1 - v^2 - \dot{u}_s^{\,2}\right) = dt^2\left(1 - w^2\right) \tag{B.7}$$

on w és la velocitat espacial total, és a dir $w^2 = v^2 + \dot{u}_s^2$. A partir de l'equació B.7 i reescrivint la relació de *dt* i *dt'*, obtenim:

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - w^2}} \tag{B.8}$$

Per tant, un observador mesurarà un temps *dt* real si i solament si $w \leq 1$, amb la qual cosa la velocitat límit de la informació és $w = 1$, igual que en la relativitat especial d'Einstein. Amb això, l'expansió de l'univers presenta un angle màxim observable, on la velocitat és 1. Per a trobar aquest angle, en l'equació B.3 podem emprar que $r/T = \sin\gamma$, i que l'objecte és comòbil a l'univers, aleshores la velocitat de canvi de γ és zero, i per tant:

$$u_s = -T\left(1-\sqrt{1-r^2/T^2}\right) = -T(1-\cos\gamma) \quad \rightarrow \quad \dot{u}_s = -(1-\cos\gamma) \tag{B.9}$$

$$1 = w^2 = v^2 + \dot{u}_s{}^2 = 2\left(1-\cos^2\gamma\right) \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{\pi}{4} \tag{B.10}$$

on s'ha emprat l'equació 2.9, és a dir, $v = r/T$.

Referències

ABDEL-RAHMAN, A.-M.M. (1990): A critical density cosmological model with varying gravitational and cosmological "constants". *General Relativity and Gravitation,* **22**, 655-663.

ANDERSON, J.D.; KEESEY, M.S.W.; LAU, E.L.; STANDISH, E.M., JR.; NEWHALL, X.X. (1978): Tests of general relativity using astrometric and radio metric observations of the planets. *Acta Astronautica,* **5**, 43-61.

ANDERSON, J.D.; SLADE, M.A.; JURGENS, R.F.; LAU, E.L.; NEWHALL, X.X.; MYLES, E. (1991): Radar and spacecraft ranging to Mercury between 1966 and 1988. *Proceedings of the Astronomical Society of Australia,* **9**, 324.

ARBAD, A. I. (2003): The universe with bulk viscosity. *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics,* **3**, 113. arXiv:gr-qc/9812070v2

BENVENUTO, O. G.; ALTHAUS, L.G.; TORRES, D.F. (1999): Evolution of white dwarfs as a probe of theories of gravitation: the case of Brans-Dicke. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* **305**, 905-919.

BIESIADA, M.; MALEC, M. (2004): A new white dwarf constraint on the rate of change of the gravitational constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* **350**, 644-648.

BISNOVATYI-KOGAN, G.S. (2006): Checking the Variability of the Gravitational Constant with Binary Pulsars. *International Journal of Modern Physics D,* 15: 1047-1051.

BRANS, C.; DICKE, R. H. (1961): Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Physical Review,* **124**, 925-935.

CAHILL, R.T.; KITTO, K. (2003): Michelson-Morley experiments revisited and the cosmic background radiation preferred frame. *Apeiron,* **10**: 104–117.

CARLIP, S. (2001): Quantum Gravity: a Progress Report. *Reports on Progress in Physics,* **64**, 885-942.

CHIN, C.-W.; STOTHERS, R. (1976): Limit on the Secular Change of the Gravitational Constant Based on Studies of Solar Evolution. *Physical Review Letters,* **36**, 833–835

DAMOUR, T.; GUNDLACH, C. (1991): Nucleosynthesis constraints on an extended Jordan-Brans-Dicke theory. *Physical Review D (Particles and Fields),* **43**, 3873-3877.

DEARBORN, D. S.; SCHRAMM, D. N. (1974): Limits on variation of G from clusters of galaxies. *Nature,* **247**, 441-443.

DEGL'INNOCENTI, S.; FIORENTINI, G.; RAFFELT, G.G.; RICCI, B.; WEISS, A. (1996): Time-variation of Newton's constant and the age of globular clusters. *Astronomy and Astrophysics,* **312**, 345-352.

DEMARQUE, P.; LAWRANCE, M.K.; GUENTHER, D.B.; NYDAM, D. (1994): The sun as a probe of varying G. *The Astrophysical jorunal,* **437**: 870-878

DVALI, G.; GABADADZE, G; PORRATI, M. (2000): 4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Space. *Physical Letters B,* 485: 208-214.

DIRAC, P.A.M. (1938): A new basis for cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London A,* **165**, 199-208.

DIRAC, P.A.M. (1975): Variation of G. *Nature,* **254**, 273.

EDDINGTON A. S. (1933): *The Expanding Universe*. London, Cambridge University Press. Pp. 128.

EINSTEIN, A. (1916), Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik*, **49**, 284-339.

FIXLER, J.B.; FOSTER, G.T.; MCGUIRK, J.M.; KASEVICH, M.A. (2007): Atom Interferometer Measurement of the Newtonian Constant of Gravity, *Science* **315**, 74–77.

GARCÍA-BERRO, E.; HERNANZ, M.; ISERN, J.; MOCHKOVITCH, R. (1995): The rate of change of the gravitational constant and the cooling of white dwarfs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **277**, 801-810.

GAZTAÑAGA, E.; GARCÍA-BERRO, E.;ISERN J.; BRAVO, E.; DOMÍNGUEZ, I. (2001): Bounds on the possible evolution of the gravitational constant from cosmological type-Ia supernovae. *Physical Review D*, **65**, 023506.

GREEN, M.; SCHWARZ, J.H.; WITTEN, E. (1987): *Superstring theory*. Cambridge University Press.

GUENTHER, D. B.; SILLS, K.; DEMARQUE, P.; KRAUSS, L. M. (1995): Sensitivity of solar g-modes to varying G cosmologies. *The Astrophysical Journal,* **445**, 148-151.

GUENTHER, D. B., DEMARQUE, P., & KRAUSS, L. M. (1998): Testing the Constancy of Newton's Gravitational Constant using Helioseismology**.** *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars SOHO 6/GONG 98 Workshop Abstract*, Boston, Massachusetts, p. 469.

HELLINGS, R.W.; ADAMS, P.J.; ANDERSON, J.D.; KEESEY, M.S.; LAU, E.L.; STANDISH, E.M.; CANUTO, V.M.; GOLDMAN, I. (1983): Experimental test of the Variability of G using Viking Lander Ranging Data, *Physical Review Letters,* **51**, 1609-1612.

HELLINGS, R.W.; ADAMS, P.J.; ANDERSON, J.D.; KEESEY, M.S.; LAU, E. L.; STANDISH, E.M.; CANUTE, V.M.; GOLDMAN, I. (1989): Experimental test of the variability of G using Viking lander ranging data. *International Journal of Theoretical Physics,* **28**, 1035-1041.

HINSHAW, G. ET AL. (WMAP collaboration) (2009): Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Data Processing, Sky Maps, and Basic Results. *The Astrophysical Journal Supplement,* **180**, 225–245.

HUBBLE, E.P. (1937): *The Observational Approach to Cosmology*, Oxford, Clarendon Press.

HOYLE, F. (1960): *The Nature of the Universe*. Harper, New York.

KASPI, V. M.; TAYLOR, J. H.; RYBA, M. F. (1994). High-precision timing of millisecond pulsars 3: Long-term monitoring of PSRs B1855+09 and B1937+21. *Astrophysical Journal,* **428**, 713–728.

KOMATSU, E.; ET AL. (WMAP collaboration) (2009): Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement,* **180**, 330-376

KOWALSKI, D.R, ET AL. (THE SUPERNOVA COSMOLOGY PROJECT) (2008): Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets. *The Astrophysical Journal*, **686**, 749-778

KRAUSS, L.; WHITE, M. (1992): Gravitational Lensing and the Variation of G. *Astrophysics Journal*, **397**: 357

LIDDLE, A.R. (2003): *An Introduction to Modern Cosmology*. Chichester, Wiley.

MCELHINNY, M.W.; TAYLOR, S.R.; STEVENSON, D.J. (1978): Limits to the expansion of Earth, Moon, Mars and Mercury and to changes in the gravitational constant. *Nature,* **271**, 316-321.

MASSA, C. (1997): Einstein-like field equations with conserved source and decreasing Λ term; their cosmological consequences. *Astrophysics and Space Science*, **246**, 153-158

MOHR, P. J.; BARRY N. TAYLOR, B. N. (2005), CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2002, *Reviews of Modern Physics,* **77**, 1–107,

MØLLER, C. (1952): *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, Oxford, England.
MORRISON, L.V. (1973): Rotation of the Earth from AD 1663-1972 and the Constancy of G. *Nature*, **241**, 519-520.
MÜLLER, J.; SCHNEIDER, M.; SOFFEL, M.; RUDER H. (1991): Testing Einstein's theory of gravity by analyzing lunar ranging data. *Astrophysics Journal Letters,* **382**, p. L101.
MÜLLER, J.; BISKUPEK, L. (2007): Variations of the gravitational constant from lunar laser ranging data. *Classical and Quantum Gravity,* **24**, 4533.
MÚNERA, H.A. (2009): Towards the reinstatement of absolute space, and some possible cosmological implications. *The ICFAI University Journal of Physics*, 2: 7 - 24.
OLIVE, K.A.; POSPELOV, M.; QIAN, Y.-Z.; COC, A.; CASSÉ, M.; VANGIONI-FLAM, E. (2002): Constraints on the variations of the fundamental couplings. *Physical Review D*, **66**: 045022.
O'NEILL, B. (1983): *Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity*. Ed. Academic Press. 468 p. eISBN: 978-0-08-057057-0.
OVERDUIN, J. M.; WESSON, P. S. (1997): Kaluza-Klein Gravity. *Physics Reports*, **283**, 303-378.
REASENBERG, R.D.; SHAPIRO, I.I. (1978): *On the Measurement of Cosmological Variations of the Gravitational Constant*, in HALPERN, L. (Ed.), Gainesville, University Presses of Florida: 21.
RIESS, A.G.; FILIPPENKO, A.V.; CHALLIS, P.; CLOCCHIATTI, A.; DIERCKS, A.; GARNAVICH, P.M.; GILLILAND, R.L.; HOGAN, C.J.; JHA, S.; K., ROBERT P.; LEIBUNDGUT, B.; PHILLIPS, M.M.; REISS, D.; SCHMIDT, B.P.; SCHOMMER, R.A.; S.R. CHRIS; SPYROMILIO, J.; STUBBS, C.; SUNTZEFF, N.B.; TONRY, J. (1998): Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *The Astronomical Journal*, **116**, 1009-1038.
ROBERTSON, H.P. (1929): The Uncertainty Principle. *Physical Review*, **34**, 163–164.
ROVELLI, C. (2004): *Quantum Gravity*. Cambridge University Press.
SALAM, A.; WIGNER, E. (1972): *The Fundamental Constants and their Time Variation*. Cambridge University Press, Cambridge.
SALVATORE, P.; LONGONI, R. (2005): "Configuration spaces are not homotopy invariant", *Topology,* 44: 375–380.
SCHWARZSCHILD, K. (1916a): Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, *Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse fur Mathematik, Physik, und Technik*, pp 189.
SCHWARZSCHILD, K. (1916b): Uber das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flussigkeit nach der Einsteinschen Theorie, *Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse fur Mathematik, Physik, und Technik*, pp 424.
SHAPIRO, I.I.; ASH, M.E.; INGALLS, R.P.; SMITH, W.B.; CAMPBELL, D.B.; DYCE, R.B., JURGENS, R.F., PETTENGILL G. H.(1971): Fourth Test of General Relativity: New Radar Result. *Physical Review Letters,* **26**, 1132–1135
SISTERNA, P.D.; VUCETICH, H. (1994): Cosmology, oscillating physics, and oscillating biology. *Physical Review Letters*, **72**, 454–457.
SISTERNA, P.D.; VUCETICH, H. (1991): Time variation of fundamental constants. II. Quark masses as time-dependent parameters. *Physical Review D* **44**, 3096–3108.
SLIPHER, V.M. (1913): The Radial Velocity of the Andromeda Nebula. *Lowell Observatory Bulletin* 1: 56–57.
SMOOT, G. F.; BENNETT, C. L.; KOGUT, A.; WRIGHT, E. L.; AYMON, J.; BOGGESS, N. W.; CHENG, E. S.; DE AMICI, G.; GULKIS, S.; HAUSER, M. G.; HINSHAW, G.; JACKSON, P. D.; JANSSEN, M.; KAITA, E.; KELSALL, T.; KEEGSTRA, P.;

LINEWEAVER, C.; LOEWENSTEIN, K.; LUBIN, P.; MATHER, J.; MEYER, S. S.; MOSELEY, S. H.; MURDOCK, T.; ROKKE, L.; SILVERBERG, R. F.; TENORIO, L.; WEISS, R.; WILKINSON, D. T. (1992): Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. Astrophysical Journal, Part 2: L1-L5.

SPERGEL, D. N.; ET AL. (WMAP collaboration) (2007). Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology. *Astrophysical Journal Supplement* **170**, 377.

SPERGEL, D. N.; ET AL. (WMAP collaboration) (2003): First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters, *Astrophysical Journal Supplement* **148**, 175.

SZABÓ, G.M.; GERGELY, L.A.; KERESZTES, Z. (2007): The luminosity-redshift relation in brane-worls: II. Confrontation with experimental data. *PMC Physics A* **1**: 8.

TEGMARK, M.; ET AL. (WMAP collaboration) (2004): Cosmological Parameters from SDSS and WMAP. *Physical Review D,* **69,** 103501.

THORSETT, S. E. (1996): The Gravitational Constant, the Chandrasekhar Limit, and Neutron Star Masses. *Physical Review Letters,* **77**,1432–1435.

VAN FLANDERN, T.C. (1981): Is the Gravitational Constant Changing. *Astrophysical Journal*, **248**, 813-816.

WANG, J. (1991): Astrophysical constraints on the gravitational constant. *Astrophysics and Space Science*, **184**, 31-36.

WALD, R. M. (1984): *General Relativity*, Chicago University Press.

WEINBERG, S. (1972): *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley.

WEINBERG, S. (1995): *The Quantum Theory of Fields I: Foundations*, Cambridge University Press.

WEINBERG, S. (1996): *The Quantum Theory of Fields II: Modern Applications*, Cambridge University Press.

WEINBERG, S. (2000): *The Quantum Theory of Fields III: Supersymmetry*, Cambridge University Press.

WILLIAMS, J.G.; SINCLAIR, W.S.; YODER, C.F. (1978): Tidal acceleration of the Moon. *Geophysical Research Letters,* **5**, 943-946.

WILLIAMS, J.G.;NEWHALL, X.X; DICKEY, J.O. (1996): Relativity parameters determined from lunar laser ranging. *Physical Review D*, **53**, 6730–6739.

WU, Y.; WANG, Z. (1986): Time variation of Newton's gravitational constant in superstring theories. *Physical Review Letters,* **57**, 1978-1981.

WUENSCH, D. (2003): The 5th Dimension: Theodor Kaluza's Groundbreaking Idea. *Annalen der Physik*, **9**, 519-542.