Una aproximació a l'electromagnetisme des de la relativitat general

Robert Monjo i Agut
Departament de Física de la Terra i Termodinàmica. Universitat de València.
robert@temps.cat

Resum

L'electrostàtica i la gravitació clàssica s'assemblen tant que la possible unificació ha estat objecte d'estudi des de fa molts anys. Encara que actualment l'electromagnetisme es formula amb èxit mitjançant la teoria quàntica de camps, en aquest treball proposem una senzilla aproximació per a descriure l'electromagnetisme des de la perspectiva macroscòpica de la relativitat general. La hipòtesi de partida es basa en que dues partícules carregades provoquen una pertorbació energètica suficient per a pertorbar l'espai-temps i explicar de forma aproximada les equacions de Maxwell. Per tant, amb aqueixa senzilla idea suggerim la possibilitat de que la relació geomètrica entre l'electromagnetisme i la gravitació encara no està totalment esgotada.

Abstract

The electrostatic resembles both classical gravitation, that the possible unification has been investigated for many years. Although electromagnetism is formulated now successfully by quantum field theory, this paper proposes a simple approach to describe the electromagnetism from the macroscopic perspective of general relativity. The hypothesis is based on two charged particles that cause a disturbance energy sufficient to disrupt the space-time and explain approximately Maxwell's equations. Therefore, with such this simple idea, we suggest the possibility that the geometric relationship between electromagnetism and gravitation is not yet fully exhausted.

1. Introducció

Des de fa molts anys, gran part dels físics teòrics han trobat interès en la possible relació entre la interacció electromagnètica i la interacció gravitatòria. La majoria dels qui ho investiguen, han escollit un enfocament purament quàntic per a les propostes unificadores. Com a exemple tenim la *Teoria M* (Duff, 1996; Gribbin, 2000) i la Gravetat Quàntica de Bucles (Ashtekar, 1986, 1988) basada en els desenvolupaments geomètrics de Cartan (1922, 1923; De Andrade *et al.*, 2004; Petti, 2006). No obstant, proposem enfocar prèviament aquest problema des d'una perspectiva macroscòpica: si els potencials gravitatòri i elèctric assoleixen distàncies grans amb un comportament similar, aleshores ambdós podrien originar-se d'una forma semblant. I si l'energia-massa és capaç de generar una curvatura d'espai-temps, per què no també l'energia originada per la interacció electromagnètica? Aqueixa curvatura podria explicar les equacions de Maxwell?

Les teories de Kaluza-Klein tractaven de fer un anàlisi similar al que busquem, però van introduir una 5ª dimensió que conduí a altres problemes teòrics (Bailin i Love, 1987, Overduin i Wesson, 1997). Una cosa similar ocorre en la teoria d'M, que precisa d'11 dimensions per explicar conjuntament la gravitació i l'electromagnetisme. En aquest treball proposem aproximar-nos a les equacions clàssiques de l'electromagnetisme a partir de la pertorbació de les 4 dimensions ordinàries de la relativitat general, és a dir, mitjançant una curvatura de l'espai-temps.

Recordem que en l'espai-temps general (Wald, 1984) existeixen regions locals en les quals de forma infinitesimal tendeixen a ser planes ($\Re^4$, η; espai minkowskià). Per a aqueix límit prenem el tensor mètric com $\eta^{\alpha\beta} = \{\eta^{00} = +1, \eta^{ii} = -1\}$, on l'índex *'0'* fa referència al temps i els índex *'i'* a l'espai. Amb aqueix criteri, el quadrat de la velocitat, $u^\alpha \equiv \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\tau$ (derivada de la coordenada espacial, x^α, pel seu mòdul, $\tau \equiv |x|$) és igual a $u^\alpha u_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta = +1$.

2. La pertorbació: l'energia i el tensor impuls

Suposem que una partícula de massa m_1 i càrrega q_1 es veu sotmesa a una pertorbació energètica generada per una partícula font de massa m_2 i càrrega q_2. Fem la hipòtesi de que existeix un camp escalar elèctric generat per la font, $\Delta\zeta_2$, tal que la pertorbació energètica m_{q1} pot escriure's com el producte entre aqueix camp $\Delta\zeta_2$ i la càrrega q_1:

$$m_{q1} \equiv q_1 \Delta\zeta_2 \qquad (2.1)$$

Aleshores, per simetria, l'energia de la font es veurà afectada per una pertorbació similar, generada per l'altra partícula:

$$m_{q2} \equiv q_2 \Delta\zeta_1 \qquad (2.2)$$

Donat que l'origen dels potencials és a priori arbitrari segons la física clàssica (Alonso i Finn, 1995), suposarem un origen relatiu a la pròpia partícula, és a dir, tot potencial d'una partícula de massa m s'avalua respecte a un *radi mínim aparent*, r_m:

$$\Delta\zeta(r) \equiv \zeta(r) - \zeta_m(r_m) \qquad (2.3)$$

Cal tindre en compte que r_m ha de ser molt petita, i per tant en general ζ_m és molt més gran que ζ. A més, podem definir el potencial vector associat A^α com el producte entre un potencial escalar $\Delta\zeta$ i la velocitat u^α, és a dir:

$$A^\alpha \equiv \Delta\zeta\, u^\alpha \qquad (2.4)$$

La massa-energia w d'una partícula de càrrega q_2 pot desglossar-se en una massa pròpia m_2 i una energia addicional, m_{q2}, procedent d'un hipotètic potencial elèctric extern $\Delta\zeta_1$:

$$w \equiv m_2 + m_{2q} = m_2 + q_2 \Delta\zeta_1 \qquad (2.5)$$

Amb això el vector impuls-energia d'aqueixa partícula es defineix com el producte de la seua energia w i la seua velocitat u:

$$P^\alpha \equiv w u^\alpha = m_2 u^\alpha + q_2 A_1^\alpha \qquad (2.6)$$

on A_1^α és el potencial vector del camp extern $\Delta\zeta_1$. Per tant, siga una font de partícules amb una certa massa i una certa càrrega que pertorben lleugerament l'espai, definim el tensor impuls-energia generalitzat com:

$$P^{\alpha\beta} \equiv \sum_a \int \delta^4[x - x_a]\, P_a^\alpha\, dx_a^\beta \qquad (2.7)$$

on P_a és el vector impuls-energia de cada "partícula font" situada en la posició x_a. Per a comprovar que $P^{\alpha\beta}$ està ben definit, recordem que el tensor impuls-energia i corrent elèctric venen definits per:

$$P_m^{\alpha\beta} \equiv \sum_a \delta^3[\vec{x} - \vec{x}_a(t)]\, m_a u_a^\alpha \frac{dx_a^\beta}{dt} \qquad (2.8)$$

$$j^{\alpha} \equiv \sum_a \delta^3[\vec{x} - \vec{x}_a(t)]\ q_a \frac{dx_a^{\alpha}}{dt} \tag{2.9}$$

Els quals poden escriure's segons:

$$P_m^{\alpha\beta} \equiv \sum_a \int\ \delta^4[x - x_a]\ p_a{}^{\alpha} dx_a{}^{\beta} \tag{2.10}$$

$$j^{\alpha} \equiv \sum_a \int\ \delta^4[x - x_a]\ q_a dx_a^{\alpha} \tag{2.11}$$

on p_a és el vector impuls-energia clàssic, és a dir $p_a \equiv m_a u_a$. Aleshores, el tensor corrent o impuls-càrrega es defineix com:

$$J^{\alpha\beta} \equiv \sum_a \delta^3[\vec{x} - \vec{x}_a(t)]\ q_a \Delta\zeta_1 u_a^{\alpha} \frac{dx_a^{\beta}}{dt} \approx \Delta\zeta_1 \sum_a \delta^3[\vec{x} - \vec{x}_a(t)]\ q_a u_a^{\alpha} \frac{dx_a^{\beta}}{dt} \tag{2.12}$$

$$J^{\alpha\beta} \approx \Delta\zeta_1 \sum_a \int\ \delta^4[x - x_a]\ q_a u_a^{\alpha} dx_a^{\beta} \tag{2.13}$$

on $\Delta\zeta_1$ és el camp escalar extern. I de forma general, el tensor impuls-energia-càrrega queda com:

$$P^{\alpha\beta} = P_m^{\alpha\beta} + J^{\alpha\beta} \tag{2.14}$$

Per a un fluid perfecte (sense viscositat), el tensor impuls-energia-càrrega pot escriure's com (Møller, 1952):

$$P^{\alpha\beta} \equiv (\rho + \sigma) u^{\alpha} u^{\beta} + g^{\alpha\beta} \sigma \tag{2.15}$$

on g és el tensor mètric amb límit minkowskià de signatura (1, 3), σ és la pressió, i ρ és la densitat energètica total:

$$\rho \approx \rho_{m2} + \Delta\zeta_1 \rho_{q2} \tag{2.16}$$

Si a més a més suposem que la pressió elèctrica és molt menor que la densitat energètica, aleshores el tensor corrent té la forma:

$$J^{\alpha\beta} \approx \Delta\zeta_1 \rho_{q2} u^{\alpha} u^{\beta} \approx -\zeta_{1m} \rho_{q2} u^{\alpha} u^{\beta} \tag{2.17}$$

Finalment, cal recordar que si el determinant de la mètrica, g, és significativament distint de –1, aleshores el tensor impuls-energia general (Møller, 1952; Wald, 1984) queda com:

$$\hat{P}^{\alpha\beta} \equiv \sum_a \int\ \frac{\delta^4[x - x_a]}{\sqrt{-g}}\ P_a^{\alpha} dx_a{}^{\beta} \tag{2.18}$$

$$\hat{P}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} P^{\alpha\beta} \tag{2.19}$$

on $P^{\alpha\beta}$ és el tensor impuls-energia en l'espai minkowskià. No obstant en aquest treball suposarem que estem en un espai poc pertorbat i per tant el determinant de la mètrica és aproximadament –1.

3. Part electromagnètica de les equacions d'Einstein

El fet de que existeixca una pertorbació energètica provocada per una càrrega elèctrica, ens fa esperar que la curvatura de l'espai-temps presente una contribució provocada per dita càrrega. Aleshores tractarem d'escriure el tensor mètric $g_{\lambda\sigma}$ de l'espai minkowskià en funció d'una contribució gravitatòria $\Phi_{\lambda\sigma}$ i d'una contribució electromagnètica $\mathrm{A}_{\lambda\sigma}$. A priori suposerem que aquestes contribucions són suficientment menudes respecte a la mètrica, de tal manera que podem dividir-la en tres parts:

$$g_{\lambda\sigma} \approx \eta_{\lambda\sigma} + \Phi_{\lambda\sigma} + \mathrm{A}_{\lambda\sigma} \tag{3.1}$$

Amb això, caldrà esperar que el tensor de Riemann (O'Neill,1983) també es podrà escriure de forma separada les dues contribucions. Recordem que el tensor de Riemman pren la forma:

$$R^{\lambda}{}_{\alpha\beta\gamma} = \left(\partial_\gamma \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\lambda}{}_{\gamma\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}\right) - \left(\partial_\beta \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\gamma}\right) \tag{3.2}$$

on Γ són els símbols de Christoffel:

$$\Gamma^{\upsilon}{}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2} g^{\upsilon\rho}\left(\partial_\alpha g_{\rho\beta} + \partial_\beta g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\beta}\right) \tag{3.3}$$

Si suposem que la pertorbació es petita, és a dir:

$$\left|\Phi_{\lambda\sigma}\right| << 1 \quad i \quad \left|\mathrm{A}_{\lambda\sigma}\right| << 1 \tag{3.4}$$

Aleshores podem aproximar els símbols de Christofel segons:

$$\Gamma^{\upsilon}{}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\eta^{\upsilon\rho}\left[\left(\partial_\alpha \Phi_{\rho\beta} + \partial_\beta \Phi_{\rho\alpha} - \partial_\rho \Phi_{\alpha\beta}\right) + \left(\partial_\alpha \mathrm{A}_{\rho\beta} + \partial_\beta \mathrm{A}_{\rho\alpha} - \partial_\rho \mathrm{A}_{\alpha\beta}\right)\right] \tag{3.5}$$

i per tant, la major contribució en el tensor de Riemann vindrà donada per:

$$R^{\lambda}{}_{\alpha\beta\gamma} \approx \partial_\gamma \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\gamma} \quad \propto \quad \partial\partial\Phi_{\alpha\gamma} + \partial\partial\mathrm{A}_{\alpha\gamma} \tag{3.6}$$

Amb això, podem veure que el tensor de Ricci (O'Neill, 1983) pot aproximar-se segons:

$$R_{\lambda\beta} \equiv g^{\alpha\gamma} g_{\lambda\mu} R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \approx g^{\alpha\gamma} g_{\lambda\mu}\left(\partial_\gamma \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\gamma}\right) \tag{3.7}$$

$$R_{\lambda\beta} \approx \tfrac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g_{\lambda\mu} g^{\mu\rho}\left(\partial_\gamma\partial_\alpha g_{\rho\beta} - \partial_\beta\partial_\alpha g_{\rho\gamma} + \partial_\beta\partial_\rho g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma\partial_\rho g_{\alpha\beta}\right) \tag{3.8}$$

Si prenem la part elèctrica de l'equació 3.1, aleshores l'equació 3.8 queda com:

$$\tilde{R}_{\lambda\beta} \approx \tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma}\eta_{\lambda\mu}\eta^{\mu\rho}\left(\partial_\gamma\partial_\alpha \mathrm{A}_{\rho\beta} - \partial_\beta\partial_\alpha \mathrm{A}_{\rho\gamma} + \partial_\beta\partial_\rho \mathrm{A}_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma\partial_\rho \mathrm{A}_{\alpha\beta}\right) \tag{3.9}$$

$$2\tilde{R}_{\lambda\beta} \approx \partial_\gamma\partial^\gamma \mathrm{A}_{\lambda\beta} - \partial_\beta\partial^\gamma \mathrm{A}_{\lambda\gamma} + \partial_\beta\partial_\lambda \mathrm{A}^{\gamma}_{\gamma} - \partial_\lambda\partial_\gamma \mathrm{A}^{\gamma}_{\beta} \tag{3.10}$$

Per la mateixa raó, l'equació d'Einstein (1916) pot separar-se en una contribució de la massa i una altra de la càrrega:

$$R^{\alpha\beta} \approx R_m{}^{\alpha\beta} + R_q{}^{\alpha\beta} = -8\pi\, S^{\alpha\beta} \tag{3.11}$$

on R_m és la part de curvatura deguda a la massa i R_q és la contribució de la càrrega, mentre que S és un tensor construït a partir del tensor impuls-energia-càrrega (amb unitats naturals $G \equiv 1 \equiv c$), segons:

$$S^{\alpha\beta} \equiv P^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} P g^{\alpha\beta} \tag{3.12}$$

on, segons l'apartat 2 podem incloure un tensor impuls-càrrega $J_{\alpha\beta}$, segons:

$$P^{\alpha\beta} \equiv P_m^{\alpha\beta} + J^{\alpha\beta} \tag{3.13}$$

Per tant, podem escriure que:

$$R^{\alpha\beta} = R_m{}^{\alpha\beta} + R_q{}^{\alpha\beta} = -8\pi\left(P_m^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} P_m g^{\alpha\beta}\right) - 8\pi\left(J^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} J g^{\alpha\beta}\right) \tag{3.14}$$

Separant les diferents contribucions obtenim:

$$R_m{}^{\alpha\beta} \approx -8\pi\left(P_m^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} P_m g^{\alpha\beta}\right) \tag{3.15}$$

$$\tilde{R}^{\alpha\beta} \equiv R_q{}^{\alpha\beta} \approx -8\pi\left(J^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} J g^{\alpha\beta}\right) \tag{3.16}$$

Aquesta és la part electromagnètica de l'equació d'Einstein. A més a més, tenint en compte les equacions 3.10 i 2.17 es dedueix que l'ordre de magnitud del tensor $A^{\alpha\beta}$ ve donat per:

$$\partial^2 \mathrm{A}^{\alpha\beta} \sim -4\pi\, \Delta\zeta_1 \rho_{q2} u^\alpha u^\beta \tag{3.17}$$

4. Les equacions de l'electromagnetisme

4.1. Equació de Poisson

Del raonament anterior (equació 3.17) cal esperar que el tensor de la pertorbació elèctrica, $A^{\alpha\beta}$, depenga de la font pertorbadora, ζ_2, però també ha de dependre del camp associat a la partícula afectada $\Delta\zeta_1$. Per tant suposem que el tensor $A^{\alpha\beta}$ ha de tenir una forma similar a:

$$\mathrm{A}^{\alpha\beta} \approx -2\Delta\zeta_1\zeta_2 u^\alpha u^\beta \approx 2\zeta_{1m}\zeta_2 u^\alpha u^\beta \tag{4.1}$$

Amb això, l'equació 3.10 es transforma en la següent:

$$2\tilde{R}_{\lambda\beta} \approx 2\zeta_{m1}\left[\partial_\gamma\partial^\gamma\left(\zeta_2 u_\lambda u_\beta\right) - \partial_\beta\partial^\gamma\left(\zeta_2 u_\lambda u_\gamma\right) + \partial_\beta\partial_\lambda\left(\zeta_2 \underbrace{u^\gamma u_\gamma}_{+1}\right) - \partial_\lambda\partial_\gamma\left(\zeta_2 u^\gamma u_\beta\right)\right] \tag{4.2}$$

Si multipliquem l'equació 4.2 per u^λ (veure Annex) arribem a que:

$$\zeta_{m1}{}^{-1}u^\lambda\tilde{R}_{\lambda\beta} \approx \partial^\gamma F_{\gamma\beta} + d_\tau\partial_\beta\zeta_2 - d_\tau{}^2\left(\zeta_2 u_\beta\right) - \zeta_2\left(\partial_\beta u_\lambda\right)\left(d_\tau u^\lambda\right) - \zeta_2 u_\beta\left(\partial_\gamma u_\lambda\right)\left(\partial^\gamma u^\lambda\right) \tag{4.3}$$

on s'ha definit que:

$$F_{\gamma\beta} \equiv \partial_\gamma\left(\zeta_2 u_\beta\right) - \partial_\beta\left(\zeta_2 u_\gamma\right) \tag{4.4}$$

Si suposem que el camp és estacionari respecte un sistema de coordenades comòbil, aleshores:

$$\zeta_{m1}{}^{-1}u^\lambda\tilde{R}_{\lambda\beta} \approx \partial^\gamma F_{\gamma\beta} - \zeta_2 d_\tau{}^2\left(u_\beta\right) - \zeta_2\left(\partial_\beta u_\lambda\right)\left(d_\tau u^\lambda\right) - \zeta_2 u_\beta\left(\partial_\gamma u_\lambda\right)\left(\partial^\gamma u^\lambda\right) \tag{4.5}$$

Menyspreant els termes quadràtics amb la derivada de la velocitat, $(\partial u)^2$, tenim:

$$\zeta_{m1}{}^{-1}u^\lambda\tilde{R}_{\lambda\beta} \approx \partial^\gamma F_{\gamma\beta} - \zeta_2 d_\tau{}^2 u_\beta \tag{4.5}$$

Aquesta és la major contribució a la part elèctrica del tensor de Ricci. D'altra banda, de l'equació 3.16 i 2.17, tenim:

$$\tilde{R}_{\lambda\beta} = -8\pi\left(J_{\lambda\beta} - \tfrac{1}{2}Jg_{\lambda\beta}\right) = -8\pi\left(\Delta\zeta_1\rho_{q2}u_\lambda u_\beta - \tfrac{1}{2}\Delta\zeta_1\rho_{q2}g_{\lambda\beta}\right) \tag{4.6}$$

Per tant, ara podem contraure l'equació 4.6 amb la velocitat u_λ, i ens queda que:

$$u^\lambda\tilde{R}_{\lambda\beta} = -4\pi\ \Delta\zeta_1\rho_{q2}u_\beta \approx 4\pi\ \zeta_{1m}\rho_{q2}u_\beta \tag{4.7}$$

Multiplicant l'equació 4.7 per la constant $\zeta_{m1}{}^{-1}$ i igualant a l'equació 4.5:

$$\partial^\gamma F_{\gamma\beta} - \zeta_2 d_\tau{}^2 u_\beta \approx 4\pi\ \rho_{q2}u_\beta \tag{4.8}$$

Menyspreant el terme $d_\tau{}^2 u_\beta$, aleshores l'equació 4.8 queda com:

$$\partial^\gamma F_{\gamma\beta} \approx 4\pi\ \rho_{q2}u_\beta \tag{4.9}$$

Finalment, si escollim el *gauge* tal que $\partial^\gamma(\zeta_2 u_\gamma) = 0$, i recordant la definició de l'equació 4.4, aleshores:

$$\partial_\gamma\partial^\gamma\left(\zeta_2 u_\beta\right) \approx 4\pi\ \rho_{q2}u_\beta \tag{4.10}$$

La qual cosa és una equació de Poisson amb D'Alembertià (recordem que $\partial_\gamma\partial^\gamma = \partial_0{}^2 - \partial_i{}^2 \equiv \Box$). Si la densitat ρ_q és integrable, aleshores podem aplicar el teorema de Green a l'equació 4.10, amb la qual la solució general d'aqueixa equació aproximada és (McDonald,1997; Stewart, 2004):

$$\tilde{A}_\beta \equiv \zeta_2 u_\beta \approx \int \frac{\rho_{q2}(x')u_\beta}{r}\delta(x_0' - r)dV' \tag{4.11}$$

on $r = |x - x'|$ és la distància a la font i per tant $\delta(x_0' - r)$ és la delta del retard sofert, on x_0' és la component temporal de la posició de la font, x'.

4.2. Potencial escalar

A partir de l'equació 4.11 podem escriure que el potencial elèctric $\Delta\zeta$ té una forma similar al potencial gravitatori $\Delta\phi$, (Alonso i Finn, 1995):

$$\begin{cases} \Delta\zeta \equiv \zeta(r) - \zeta_m(r_m) \approx \dfrac{q}{r} - \dfrac{q}{r_m} \\ \Delta\phi \equiv \phi(r) - \phi_m(r_m) \approx -\dfrac{m}{r} + \dfrac{m}{r_m} \end{cases} \tag{4.12}$$

Per tant, podem suposar que en al menys algun cas pot existir una analogia entre la mètrica de la contribució elèctrica i la de la contribució màssica:

$$\begin{cases} \mathrm{A}^{00} \approx -2\Delta\zeta_1\zeta_2 \approx \ 2\zeta_{m1}\zeta_2 \\ \Phi^{00} \approx \ 2\Delta\phi_1\phi_2 \ \approx -2\phi_{m1}\phi_2 \end{cases} \tag{4.13}$$

Encara així, l'element g_{00} ha de mantenir similituds a l'aproximació newtoniana (Wald, 1984), és a dir:

$$g_{00} \approx 1 + 2\phi_2 \approx \left(1 - \frac{2m_2}{r}\right) \tag{4.14}$$

Per la qual cosa, podem trobar el valor del *radi mínim aparent, r_m*:

$$\Phi^{00} \approx -\frac{2m_2}{r} \approx -2\phi_{m1}\phi_2 = \ -2\left(-\frac{m_1}{r_{m1}}\right)\left(-\frac{m_2}{r}\right) \quad \rightarrow \quad r_{m1} = m_1 \tag{4.15}$$

i en conseqüència, obtenim la constant ζ_{m1}:

$$\mathrm{A}^{00} \approx 2\zeta_{m1}\zeta_2 = \ 2\left(\frac{q_1}{r_{m1}}\right)\left(\frac{q_2}{r}\right) = \frac{2q_1}{m_1}\frac{q_2}{r} \ \rightarrow \ \zeta_{m1} = \frac{q_1}{m_1} \tag{4.16}$$

4.3. Primera identitat de Bianchi

D'altra banda, cal recordar que la primera identitat de Bianchi (O'Neill, 1983) és:

$$R_{\lambda\alpha\beta\gamma} + R_{\lambda\gamma\alpha\beta} + R_{\lambda\beta\gamma\alpha} \equiv 0 \tag{4.17}$$

I si a més tenim en compte que una de les propietats del tensor de curvatura de Riemann sobre vectors és:

$$\tilde{A}_\sigma R^\sigma{}_{\gamma\alpha\beta} = \nabla_\alpha \nabla_\beta \tilde{A}_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha \tilde{A}_\gamma \tag{4.18}$$

aleshores veiem que s'acompleix la següent relació:

$$\nabla^\gamma F^{\alpha\beta} + \nabla^\alpha F^{\beta\gamma} + \nabla^\beta F^{\gamma\alpha} = \underbrace{\nabla^\gamma\nabla^\alpha\tilde{A}^\beta}_{b}\underbrace{-\nabla^\gamma\nabla^\beta\tilde{A}^\alpha}_{a} + \underbrace{\nabla^\alpha\nabla^\beta\tilde{A}^\gamma}_{c}\underbrace{-\nabla^\alpha\nabla^\gamma\tilde{A}^\beta}_{b} + \underbrace{\nabla^\beta\nabla^\gamma\tilde{A}^\alpha}_{a}\underbrace{-\nabla^\beta\nabla^\alpha\tilde{A}^\gamma}_{c} \tag{4.19}$$

$$\nabla_\gamma F_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \ F_{\beta\gamma} \ + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} = \underbrace{\tilde{A}_\sigma R^\sigma{}_{\beta\gamma\alpha}}_{a} + \underbrace{\tilde{A}_\sigma R^\sigma{}_{\gamma\alpha\beta}}_{b} + \underbrace{\tilde{A}_\sigma R^\sigma{}_{\alpha\beta\gamma}}_{c} = \tilde{A}_\sigma\left(R^\sigma{}_{\beta\gamma\alpha} + R^\sigma{}_{\gamma\alpha\beta} + R^\sigma{}_{\alpha\beta\gamma}\right) = 0 \tag{4.20}$$

Per tant, arribem a la següent identitat:

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} \equiv 0 \tag{4.21}$$

Aquesta identitat és coneguda com l'equació homogènia de l'electromagnetisme.

4.4. Caiguda lliure en un camp electromagnètic

Un punt fonamental en el treball és la comprovació de la consistència de les equacions pel que fa a la caiguda lliure per a partícules carregades. Siga l'equació de les geodèsiques (Møller, 1952):

$$\frac{D}{d\tau}u^\mu = \frac{d}{d\tau}u^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \tag{4.22}$$

on Γ són els símbols de Christoffel,

$$\Gamma^\upsilon{}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2} g^{\upsilon\rho}\left(\partial_\alpha g_{\rho\beta} + \partial_\beta g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\beta}\right) \tag{4.23}$$

aleshores la part electromagnètica de l'equació hauria de vindre del següent desenvolupament:

$$\left(\Gamma^\upsilon{}_{\alpha\beta}\right)_{elèc} \approx \tfrac{1}{2}\eta^{\upsilon\rho}\left(\partial_\alpha \mathrm{A}_{\rho\beta} + \partial_\beta \mathrm{A}_{\rho\alpha} - \partial_\rho \mathrm{A}_{\alpha\beta}\right) \tag{4.24}$$

$$\left(\Gamma^\upsilon{}_{\alpha\beta}\right)_{elèc} \approx \tfrac{1}{2}\left(\partial_\alpha \mathrm{A}^\upsilon_\beta + \partial_\beta \mathrm{A}^\upsilon_\alpha - \partial^\upsilon \mathrm{A}_{\alpha\beta}\right) \tag{4.25}$$

D'altra banda, tenint en compte l'equació 4.1 i 4.11, podem rescriure la contribució elèctrica del tensor mètric com:

$$\mathrm{A}^{\alpha\beta} \approx 2\zeta_{m1}\zeta_2 u^\alpha u^\beta = 2\zeta_{m1}\tilde{A}_2{}^\alpha u^\beta \tag{4.26}$$

Substituint l'equació 4.25 amb la 4.26, observem que per cada derivada del tensor, hi un membre que depèn de la derivada parcial de la velocitat,

$$\partial_\gamma \mathrm{A}^{\alpha\beta} \approx 2\zeta_{m1} u^\beta \partial_\gamma \tilde{A}_2{}^\alpha + 2\zeta_{m1}\tilde{A}_2{}^\alpha \underbrace{\partial_\gamma u^\beta}_{\text{Superflu}} \tag{4.27}$$

i donat que en l'equació 4.22 apareix la contracció dels símbols de Christoffel amb la velocitat, aleshores s'hi anul·la el terme amb la derivada de la velocitat ($u_\beta \partial_\gamma u^\beta = 0$) que apareix en la combinació de les equacions 4.22, 4.25 i 4.27. Per tant ens queda:

$$\left(\Gamma^\upsilon{}_{\alpha\beta}\right)_{elèc} u^\alpha u^\beta \approx \zeta_{m1} u^\alpha u^\beta \left(u_\beta \underbrace{\partial_\alpha \tilde{A}_2{}^\upsilon}_{\to F_\alpha{}^\upsilon} + u_\alpha \partial_\beta \tilde{A}_2{}^\upsilon - u_\beta \underbrace{\partial^\upsilon \tilde{A}_{2\alpha}}_{\to F_\alpha{}^\upsilon} \right) \tag{4.28}$$

on hem considerat que |A| << 1 i per tant $g \approx \eta$. Si ara apliquem la definició 4.4, veiem que:

$$\left(\Gamma^\upsilon{}_{\alpha\beta}\right)_{elèc} u^\alpha u^\beta \approx \zeta_{m1} u^\alpha u^\beta \left(u_\beta F_\alpha{}^\upsilon + u_\alpha \partial_\beta \tilde{A}^\upsilon \right) \tag{4.29}$$

Contraent la velocitat:

$$\left(\Gamma^\upsilon{}_{\alpha\beta}\right)_{elèc} u^\alpha u^\beta \approx \zeta_{m1} \left(u^\alpha F_\alpha{}^\upsilon + u^\beta \partial_\beta \tilde{A}^\upsilon \right) \tag{4.30}$$

$$\left(\Gamma^\upsilon{}_{\alpha\beta}\right)_{elèc} u^\alpha u^\beta \approx \zeta_{m1} \left(u^\gamma F_\gamma{}^\upsilon + d_\tau \tilde{A}^\upsilon \right) \tag{4.31}$$

Per tant, sumant la contribució elèctrica (*elèc*) i màssica (*màs*) de l'equació de les geodèsiques, aquesta queda com:

$$\frac{D}{d\tau} u^\mu \approx \frac{d}{d\tau} u^\mu + \left(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\right)_{màs} u^\alpha u^\beta + \left(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\right)_{elèc} u^\alpha u^\beta \tag{4.32}$$

$$\frac{D}{d\tau} u^\mu \approx \frac{d}{d\tau} u^\mu + \left(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\right)_{màs} u^\alpha u^\beta + \zeta_{m1} u^\gamma F_\gamma{}^\mu + \tfrac{1}{2}\zeta_{m1} d_\tau \tilde{A}^\mu \tag{4.33}$$

$$\frac{D}{d\tau} u^\mu \approx \frac{d}{d\tau} u^\mu + \left(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\right)_{màs} u^\alpha u^\beta - \zeta_{m1} u^\gamma F^\mu{}_\gamma + \tfrac{1}{2}\zeta_{m1} d_\tau \tilde{A}^\mu \tag{4.34}$$

on la constant ζ_{m1} la podem substituir segons 4.16 com:

$$\zeta_{m1} \equiv \frac{q_1}{r_{m1}} = \frac{q_1}{m_1} \tag{4.35}$$

$$\frac{D}{d\tau} u^\mu \approx \frac{d}{d\tau} u^\mu + \left(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\right)_{màs} u^\alpha u^\beta - \frac{q}{m} u^\gamma F^\mu{}_\gamma + \frac{q}{m} d_\tau \tilde{A}^\mu \tag{4.36}$$

En el cas en que hi hagués una força exterior f_β, aleshores es satisfarà que:

$$f_\beta = m_1 \frac{D}{d\tau} u_\beta \approx m_1 \frac{d}{d\tau} u^\mu + m_1 \left(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\right)_{màs} u^\alpha u^\beta - q_1 u^\gamma F^\mu{}_\gamma + q_1 d_\tau \tilde{A}^\mu \tag{4.37}$$

I aïllant el terme clàssic newtonià:

$$m_1 \frac{d}{d\tau} u^\mu \approx f_\beta + q_1 u^\gamma F^\mu{}_\gamma - q_1 d_\tau \tilde{A}^\mu - m_1 \left(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\right)_{màs} u^\alpha u^\beta \tag{4.38}$$

Noteu que aquesta equació és la força de Lorentz en un camp gravitatori, exceptuant el terme $q_1 d_\tau \tilde{A}$, que depèn de la derivada temporal-pròpia del camp $\tilde{A}$. Si bé, aquest terme en general és zero.

5. Discussió

5.1. Ordre de magnitud de la pertorbació

Perquè les aproximacions anteriors siguen vàlides una de les comprovacions que cal realitzar és que la constant ζ_m siga molt més gran que el potencial escalar ordinari ζ. Recordem que la contribució elèctrica a la pertorbació energètica ve donada per l'equació 2.5, en la qual podem desfer les unitats naturals ($G \equiv 1 \equiv c$), i ens queda que:

$$w = m + q(\zeta - \zeta_m) = mc^2 + q\left(\frac{kq}{r} - \frac{kqc^2}{Gm}\right) \tag{5.1}$$

Escollint com a radi típic el radi de Bohr (Alonso i Finn, 1995), d'uns $5 \cdot 10^{-11}$ m, veiem que la constant ζ_m per al protó i electró és de l'ordre de 10^{45} J/C i 10^{48} J/C respectivament, mentre que el potencial elèctric ordinari, ζ, és de l'ordre de 10 J/C per ambdós. D'altra banda, si la teoria és correcta, cal esperar que la pertorbació elèctrica de la mètrica siga relativament petita. Desfent les unitats naturals ens queda com:

$$\mathrm{A}_{\alpha\beta} \approx 2\zeta_m \zeta\, u_\alpha u_\beta = \left(\frac{G}{kc^4}\right)\zeta_m \zeta\, u_\alpha u_\beta = \frac{2q}{mc^2}\frac{kq}{r} u_\alpha u_\beta \tag{5.2}$$

I prenent de nou els valors típics per al protó i electró en l'àtom d'hidrogen, el valor d'$A^{\alpha\beta}$ es típicament 10^{-7} i 10^{-4}, respectivament, per tant s'acompleix la aproximació inicial de $|A^{\alpha\beta}| << 1$ (expressió 3.1). No obstant això, l'equació 4.11 han estat escrita després de diverses aproximacions que no garanteixen el compliment en tots els casos, per tant és possible que la forma més adequada per al tensor 5.2 siga una altra.

5.2. Possible relació entre la càrrega i l'energia

La possible semblança entre la curvatura generada per la energia màssica i l'energia elèctrica obri una discussió sobre si es tractaria d'una coincidència o si realment aquesta relació aniria més enllà. Si fem la hipòtesi de que existeix una relació d'identitat entre l'energia elèctrica $q\zeta$ i l'energia gravitatòria $m\phi$, aleshores veiem que en certa manera podem substituir una amb l'altra mitjançant una senzilla transformació (equació 5.3), que a més a més fa que els elements mètrics (equació 4.16) siguen iguals per a la component 00:

$$\tilde{m} \leftrightarrow i\sqrt{\frac{k}{G}}q \qquad \to \qquad \begin{cases} q_1\zeta_2 = \tilde{m}_1\phi_2 \\ \mathrm{A}^{00}(q_1, q_2) = \Phi^{00}(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) \end{cases} \tag{5.3}$$

on k la constant de Coulomb i G és la constant de Newton, que en unitats naturals es consideren igual a la unitat. En definitiva, l'equació 5.3 podria ser una simple coincidència en la forma o bé podria ser l'indici d'alguna cosa més que semblança. De fet, veiem que aquesta transformació també es satisfà en l'equació 2.5 per a l'energia total w (equació 2.5), on veiem que:

$$q_2\Delta\zeta_1 = \tilde{m}_2\Delta\phi_1(\tilde{m}_1)_1 = -\frac{\tilde{m}_2\tilde{m}_1}{r} + \frac{\tilde{m}_2\tilde{m}_1}{r_{\tilde{m}1}} \overset{r_{\tilde{m}1} << r}{\approx} \frac{\tilde{m}_2\tilde{m}_1}{r_{\tilde{m}1}} \overset{r_{\tilde{m}1} = \tilde{m}_1}{\approx} \tilde{m}_2 \tag{5.4}$$

on de nou hem emprat unitats naturals (G = 1 = k), i on hem pres la forma dels potencials segons l'equació 4.15. Per tant, es raonable pensar que l'energia total que intervé en tot el procés és realment:

$$w \equiv m_2\Delta\phi_1 + q_2\Delta\zeta_1 \approx m_2 + q_2\Delta\zeta_1 \tag{5.5}$$

És a dir, a partir de l'equació 5.5 es pot definir de forma més general el vector impuls-energia que sorgeix de la nostra hipòtesi:

$$P^\alpha \equiv wu^\alpha = m_2 U_1^{\ \alpha} + q_2 A_1^{\ \alpha} \tag{5.6}$$

on hem definit que:

$$U_1^{\ \alpha} \equiv \Delta\phi_1 u^\alpha \tag{5.7}$$

Amb això el tensor impuls-energia (equacions 2.7 a 2.17) quedaria com:

$$P^{\alpha\beta} \approx \left(\Delta\phi_1\rho_{m2} + \Delta\zeta_1\rho_{q2}\right)u^\alpha u^\beta \approx \left(-\phi_{m1}\rho_{m2} - \zeta_{m1}\rho_{q2}\right)u^\alpha u^\beta \tag{5.8}$$

i aplicant les equacions 4.9 i 4.15, on $\partial_\gamma\partial^\gamma\zeta = \rho_q$ i $\partial_\gamma\partial^\gamma\phi = -\rho_m$, obtenim que:

$$P^{\alpha\beta} \approx \frac{1}{4\pi}\left(\phi_{m1}\partial_\gamma\partial^\gamma\phi_2 - \zeta_{m1}\partial_\gamma\partial^\gamma\zeta_2\right)u^\alpha u^\beta \tag{5.9}$$

D'altra banda, de les equacions 4.7 a 4.10 es dedueix que:

$$u^{\lambda}\tilde{R}_{\lambda\beta} \approx \zeta_{1m}\partial_{\gamma}\partial^{\gamma}\left(\zeta_{2}u_{\beta}\right) \approx -4\pi\ \Delta\zeta_{1}\rho_{q2}u_{\beta} \approx 4\pi\ \zeta_{1m}\rho_{q2}u_{\beta} \tag{5.10}$$

Per la qual cosa, generalitzant en base a les equacions 4.13, 5.3 i 5.8, tenim:

$$u^{\lambda}R_{\lambda\beta} \approx \zeta_{1m}\partial_{\gamma}\partial^{\gamma}\left(\zeta_{2}u_{\beta}\right) - \phi_{1m}\partial_{\gamma}\partial^{\gamma}\left(\phi_{2}u_{\beta}\right) \approx 4\pi\ \left(\zeta_{1m}\rho_{q2} + \phi_{1m}\rho_{m2}\right)u_{\beta} \approx -4\pi\ P_{\alpha\beta}u^{\alpha} \tag{5.11}$$

on $P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}g_{\beta\mu}\, P^{\gamma\mu}$. La qual cosa sembla que és coherent amb la transformació definida en l'equació 5.3 i amb la mètrica proposada anteriorment. Però cal investigar fins a quin punt és vàlida aqueixa transformació, és a dir, caldria veure si existeix un camp gravitatori tal que acompleixi la relació $A^{\alpha\beta}$ (q_1, q_2) $\leftrightarrow$ $\Phi^{\alpha\beta}$ (m_1, m_2). Si bé, en les últimes dècades alguns autors han investigat la possible analogia del camp magnètic en la gravitació, coneguda com gravitomagnetisme (Ciufolini *et al.*, 2003; Bini *et al.*, 2003), i s'han buscat proves empíriques que fins a la data no sembla descartar aqueixa possibilitat (Ashby *et al.*, 2007).

5.3. Equacions de Klein-Gordon i Dirac

Es pot comprovar que l'equació 2.6 es compatible amb les equacions de Klein-Gordon-Dirac amb interacció electromagnètica. Recordem que la signatura límit de la mètrica s'ha pres igual a (1, 3), i per tant el quadrat del vector moment P_α és igual a $+w^2$:

$$P_{\alpha} = wu_{\alpha} \qquad \rightarrow \qquad g^{\alpha\beta}P^{\alpha}P^{\beta} = w^{2}g^{\alpha\beta}u_{\alpha}u_{\beta} = w^{2} \tag{5.12}$$

Si es contrauen ambdós membres de la igualtat mitjançant una matriu vectorial γ^α, aleshores:

$$\gamma^{\alpha}P_{\alpha} = w\gamma^{\alpha}u_{\alpha} \qquad \rightarrow \qquad \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}P_{\alpha}P_{\beta} = w^{2}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}u_{\alpha}u_{\beta} = w^{2} \tag{5.13}$$

on γ^α és una matriu que necessàriament satisfà que:

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} + \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} = 2g^{\alpha\beta}I \tag{5.14}$$

on $g^{\alpha\beta}$ és el tensor mètric, I és la matriu identitat i γ^α es regeix per l'algebra de Clifford $Cl(1,3)$ (Lounesto, 2001). Doncs si ara transformem l'equació 5.13 en operadors d'acord amb el principi de correspondència de la teoria quàntica de camps, aleshores podem escriure:

$$\left(\gamma^{\alpha}P_{\alpha} - \gamma^{\alpha}wu_{\alpha}\right)\psi = 0 \tag{5.15}$$

on ψ és un camp, i P_α i wu_α són operadors. L'operador P_α és idènticament igual a $i\nabla_\alpha$, mentre que l'operador wu_α pot desglossar-se en dos, un que multiplica a la massa (u_α) i un altre que multiplica a la càrrega (A_α):

$$\left(i\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha} - \gamma^{\alpha}mu_{\alpha} - \gamma^{\alpha}qA_{\alpha}\right)\psi = 0 \tag{5.16}$$

Si multipliquem l'equació anterior per un terme d'operadors similar però canviant de signe a la massa, aleshores veiem que recuperem l'equació de Klain-Gordon amb presència de camp electromagnètic (Mandl & Shaw, 1993):

$$\left[\left(i\nabla_{\alpha} - qA_{\alpha}\right)^{2} + \tfrac{1}{2}q\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m^{2}\right]\psi = 0 \tag{5.17}$$

No obstant, tal i com ja va observar Dirac, el terme on apareix l'operador de la massa pot substituir-se directament per la massa escalar, és a dir, per a una mètrica amb signatura (1, 3) l'equació 5.16 pot escriure's com:

$$\left(i\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha} - m - \gamma^{\alpha}qA_{\alpha}\right)\psi = 0 \tag{5.18}$$

D'aquesta manera, multiplicant de nou pel mateix terme però amb la massa canviada de signe recuperem l'equació 5.17. L'equació 5.18 és la coneguda com *Equació de Dirac* amb presència de camp electromagnètic (Mandl i Shaw, 1993). Però, què passa amb l'equació 5.15 si suposem vàlides les equacions 5.6 i 5.7? En primer lloc obtenim que:

$$\left(i\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha} - \gamma^{\alpha}mU_{\alpha} - \gamma^{\alpha}qA_{\alpha}\right)\psi = 0 \tag{5.19}$$

on:

$$U_{1\alpha} \equiv \Delta\phi_{1}u_{\alpha} = \left(-\frac{m_{1}}{r} + \frac{m_{1}}{r_{m1}}\right)u_{\alpha} = \left(-\frac{m_{1}}{r} + 1\right)u_{\alpha} = \phi_{1}u_{\alpha} + u_{\alpha} \equiv V_{1\alpha} + u_{\alpha} \tag{5.20}$$

Per tant, podem rescriure l'equació 5.19 com:

$$\left(i\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha} - \gamma^{\alpha} m u_{\alpha} - \gamma^{\alpha} m V_{\alpha} - \gamma^{\alpha} q A_{\alpha}\right)\psi = 0 \tag{5.21}$$

I realitzant la transformació de Dirac (equacions 5.16 i 5.18), s'obté:

$$\left(i\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha} - m - \gamma^{\alpha} m V_{\alpha} - \gamma^{\alpha} q A_{\alpha}\right)\psi = 0 \tag{5.22}$$

Noteu que, si la càrrega fos zero, la forma quadràtica de l'equació 5.22 seria una expressió similar a l'equació 5.17 però referida a la gravitació.

5.4. Punts crítics de la teoria

El principal punt feble de la teoria és que per a reproduir de forma aproximada les equacions clàssiques d'electromagnetisme és necessari suposar prèviament l'existència de la interacció electromagnètica, de tal forma que és defineix inicialment una energia tal que $m_{q1} = q_1 \Delta\zeta_2$ (equació 2.1). Aquesta premissa inicial hauria de deduir-se d'una forma més general.

De igual manera, la interpretació geomètrica de la pertorbació elèctrica ($A^{\alpha\beta}$) del tensor mètric no és trivial, ja que pel mateix motiu s'estima que depèn de les dues càrregues (o els dos camps, ζ_1 i ζ_2).

Pel que fa a la possible correspondència entre càrrega i energia, aquesta suggereix relacions més profundes entre ambdues pertorbacions de la mètrica, la elèctrica i la màssica. Però pot conduir a resultats massa atrevits, com ara que pot haver-hi una interacció entre càrrega i energia, ja que l'energia total d'una partícula seria $m = m_{real} + \mathrm{i}m_{imag}$. Per tant, l'energia de la interacció entre dues partícules seria lògicament de l'ordre de $m_{\mathrm{int}} = m_1\phi_2 = \mathrm{G}m_1m_2/\mathrm{r}$, on s'obtindria un part imaginària de m_{int} diferent de zero, $\mathrm{Im}\{m_{\mathrm{int}}\} \neq 0$. Açò no representa un problema per a dues partícules simples, ja que la part elèctrica domina tant que seria menyspreable l'efecte. No obstant, la interacció entre una partícula carregada i un camp gravitatori intens si s'hauria de fer notar, tant que la càrrega no es conservaria totalment:

$$\tilde{m}\left(1-\frac{GM}{rc^2}\right) = i\sqrt{\frac{k}{G}}q\left(1-\frac{GM}{rc^2}\right) = i\sqrt{\frac{k}{G}}q' \longrightarrow q' = q\left(1-\frac{GM}{rc^2}\right) \tag{5.23}$$

Per exemple, si en la Terra s'ha mesurat que la càrrega fonamental de l'electró és q' = –1.602176487(40)·10^{-19}C (Mohr *et al.*, 2008), aleshores el valor en l'espai pla seria q ≈ –1.602176488·10^{-19}C. En aquest cas, ambdós valors són compatibles entre ells; però cabria esperar que s'observaren valors més diversos per efectes gravitacionals més forts, com ara en estrelles grans. I pel que sembla, s'han mesurat variacions de la constant d'estructura fina ($\alpha \equiv ke^2/\hbar c$, veure Taula1) que podrien explicar-se en part amb el fenomen descrit en l'equació 5.23. En concret, depenent de la regió de l'espai, s'han observat valors de $\Delta\alpha/\alpha$ que oscil·len entre $\pm10^{-7}$ i els $\pm10^{-3}$ (Webb *et al.*, 1999; Murphy *et al.*, 2003; Bahcall *et al.*, 2004; Grupe *et al.*, 2005; Chand *et al.*, 2005; Levshakov *et al.*, 2006, 2007; Molaro *et al.* 2008; Gutiérrez i López-Corredoira, 2010). Aquesta fluctuació regional no sembla explicar-se totalment amb la suposada variació temporal, ja que aquesta empíricament es més menuda, de l'ordre de 10^{-16} a 10^{-13} (Murphy et al., 2003; Gutiérrez i López-Corredoira, 2010).

Taula 1. Variació relativa de la constant d'estructura fina, per a diferents zones (mesurades segons el desviament al roig o *redshift*).

Autors	**$\Delta\alpha/\alpha$**	***redshift***
Webb et al. (1999)	$-1.9 \pm 0.5 \times 10^{-5}$	$1 < z < 1.6$
Webb et al. (1999)	$-0.2 \pm 0.4 \times 10^{-5}$	$0.5 < z < 1$,
Murphy et al. (2003)	$(-0.574 \pm 0.102) \times 10^{-5}$	$0.2 < z < 3.7$,
Bahcall et al. (2004)	$(+0.7 \pm 1.4) \times 10^{-4}$	$0.16 < z < 0.80$
Grupe et al. (2005)	$+(1.5 \pm 0.7) \times 10^{-3}$	$0.035 < z < 0.281$.
Chand et al. (2005)	$+(0.15\pm0.44) \times 10^{-5}$	$1.59 < z < 2.32$

Levshakov et al. (2006)	$(-0.07 \pm 0.84) \times 10^{-6}$	z = 1.15
Levshakov et al. (2007)	$+(5.4 \pm 2.5) \times 10^{-6}$	z = 1.84
Molaro et al. (2008)	$(-0.12 \pm 1.79) \times 10^{-6}$	z = 1.15
Gutiérrez i López (2010)	$(+2.4 \pm 2.5) \times 10^{-5}$	z < 0.8

6. Conclusions

Aquest treball està basat en la hipòtesi inicial de que la interacció electromagnètica pot entendre's directament com una conseqüència de la pertorbació energètica associada, la qual provocaria una curvatura de l'espai-temps. El problema es redueix per tant a trobar l'expressió més adequada per a la contribució elèctrica del tensor mètric. En concret proposem que aqueix element mètric ha de tenir una forma similar a:

$$\mathrm{A}^{\alpha\beta} \approx 2\zeta_{1m}\zeta_2 u^\alpha u^\beta \tag{6.1}$$

on ζ_2 és el camp elèctric extern, ζ_{1m} és la constant del camp elèctric de la partícula afectada. Així doncs, es comprova que la pertorbació representada en l'equació 6.1 genera una petita curvatura tal que reprodueix aproximadament les equacions fonamentals de la teoria clàssica de Maxwell, i a més també reprodueix la força de Lorentz en la caiguda lliure. Les aproximacions desenvolupades en aquest treball són coherents amb els ordres de magnitud que s'obtenen per al valor de la pertorbació de l'espai-temps. Per exemple, en un àtom d'hidrogen el valor d'$A^{\alpha\beta}$ es típicament 10^{-7} i 10^{-4}, respectivament per al protó i l'electró.

Cal destacar que la consistència amb les teories quàntiques sembla estar garantida ja que la mateixa hipòtesi inicial de la pertorbació energètica és compatible amb el terme addicional del camp elèctric que apareix en les equacions de Klain-Gordon i Dirac. A més a més, en aquest treball es dedueix una hipotètica relació de transformació entre la contribució elèctrica i gravitatòria que podria conduir a un terme addicional en les equacions de Klain-Gordon i Dirac en presència de forts camps gravitatoris.

No obstant, la teoria presenta alguns punts crítics, com ara que ha de partir d'una interacció electromagnètica prèvia (l'energia electrostàtica) del que depèn el vector moment generalitzat, font pertorbadora de la mètrica. Una de les prediccions més atrevides d'aquesta teoria aproximada és la possibilitat de que el valor de la càrrega fonamental es veja afectat per la gravetat, la qual cosa caldrà comprovar-se, o bé, justificar en cas contrari. Per tant, suggerim la possibilitat de que la relació geomètrica entre l'electromagnetisme i la gravitació no està totalment esgotada, encara que ha de aprofundir-se d'una forma més robusta.

7. Annex

Desenvolupem l'equació 4.2, amb l'objectiu de contraure-la amb la velocitat:

$$\tilde{R}_{\lambda\beta} \approx \zeta_{m1}\left[\partial^\gamma\left[\underbrace{\partial_\gamma\left(\zeta_2 u_\lambda u_\beta\right)}_{desenvolupant} - \underbrace{\partial_\beta\left(\zeta_2 u_\lambda u_\gamma\right)}_{desenvolupant}\right] + \partial_\beta\partial_\lambda\zeta_2 - \partial_\lambda\partial_\gamma\left(\zeta_2 u^\gamma u_\beta\right)\right] \tag{7.1}$$

Per tant, suggerim aïllar el terme u_λ:

$$\zeta_{m1}^{-1}\tilde{R}_{\lambda\beta} \approx \underset{\uparrow}{\partial^\gamma}\left[\underbrace{u_\lambda\partial_\gamma\left(\zeta_2 u_\beta\right) - u_\lambda\partial_\beta\left(\zeta_2 u_\gamma\right)}_{desenvolupant\quad\uparrow} + \zeta_2 u_\beta\partial_\gamma u_\lambda - \zeta_2 u_\gamma\partial_\beta u_\lambda\right] + \partial_\beta\partial_\lambda\zeta_2 - \partial_\lambda\partial_\gamma\left(\zeta_2 u^\gamma u_\beta\right) \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{m1}^{-1}\tilde{R}_{\lambda\beta} \approx{}& \left(\partial^\gamma u_\lambda\right)\left[\partial_\gamma\left(\zeta_2 u_\beta\right) - \partial_\beta\left(\zeta_2 u_\gamma\right)\right] + u_\lambda\partial^\gamma\left[\partial_\gamma\left(\zeta_2 u_\beta\right) - \partial_\beta\left(\zeta_2 u_\gamma\right)\right] \\ &+ \underset{\uparrow}{\partial^\gamma}\underbrace{\left[\zeta_2 u_\beta\partial_\gamma u_\lambda - \zeta_2 u_\gamma\partial_\beta u_\lambda\right]}_{desenvolupant\quad\uparrow} + \partial_\beta\partial_\lambda\zeta_2 - \partial_\lambda\partial_\gamma\left(\zeta_2 u^\gamma u_\beta\right)\end{aligned} \tag{7.3}$$

Seguim aïllant la velocitat u_λ, en el terme assenyalat:

$$\begin{aligned}\zeta_{m1}{}^{-1}\widetilde{R}_{\lambda\beta} \approx& \left(\partial^{\gamma}u_{\lambda}\right)\left[\partial_{\gamma}\left(\zeta_2 u_{\beta}\right)-\partial_{\beta}\left(\zeta_2 u_{\gamma}\right)\right]+u_{\lambda}\partial^{\gamma}\left[\partial_{\gamma}\left(\zeta_2 u_{\beta}\right)-\partial_{\beta}\left(\zeta_2 u_{\gamma}\right)\right]\\ &+\partial^{\gamma}\left(\zeta_2 u_{\beta}\right)\partial_{\gamma}u_{\lambda}-\partial^{\gamma}\left(\zeta_2 u_{\gamma}\right)\partial_{\beta}u_{\lambda}+\left(\zeta_2 u_{\beta}\right)\partial^2 u_{\lambda}-\left(\zeta_2 u_{\gamma}\right)\partial^{\gamma}\partial_{\beta}u_{\lambda}\\ &+\partial_{\beta}\partial_{\lambda}\zeta_2-\partial_{\lambda}\partial_{\gamma}\left(\zeta_2 u^{\gamma}u_{\beta}\right)\end{aligned} \tag{7.4}$$

Ara podem identificar un terme que fa d'operador actuant sobre u_λ (el mateix havera ocorregut si haverem aïllat u_β):

$$\zeta_{m1}{}^{-1}\widetilde{R}_{\lambda\beta} \approx u_{\lambda}\partial^{\gamma}\left[\partial_{\gamma}\left(\zeta_2 u_{\beta}\right)-\partial_{\beta}\left(\zeta_2 u_{\gamma}\right)\right]+\partial_{\beta}\partial_{\lambda}\zeta_2-\partial_{\lambda}\partial_{\gamma}\left(\zeta_2 u^{\gamma}u_{\beta}\right)+O_{\beta}\left(u_{\lambda}\right) \tag{7.5}$$

on l'operador és:

$$O_{\beta} \equiv \left(\left[\partial_{\gamma}\left(\zeta_2 u_{\beta}\right)-\partial_{\beta}\left(\zeta_2 u_{\gamma}\right)\right]\underset{(1)}{\partial^{\gamma}}+\partial^{\gamma}\left(\zeta_2 u_{\beta}\right)\underset{(2)}{\partial_{\gamma}}-\partial^{\gamma}\left(\zeta_2 u_{\gamma}\right)\underset{(3)}{\partial_{\beta}}+\left(\zeta_2 u_{\beta}\right)\underset{(4)}{\partial^2}-\left(\zeta_2 u_{\gamma}\right)\underset{(5)}{\partial^{\gamma}\partial_{\beta}}\right) \tag{7.6}$$

Cal destacar que en 7.6 es tracta d'un operador diferencial amb termes de primer ordre (1, 2 i 3) i de segon ordre (4 i 5). Per tant, si contraiem l'equació 7.5 amb la velocitat, ens queda que:

$$\zeta_{m1}{}^{-1}u^{\lambda}\widetilde{R}_{\lambda\beta} \approx \partial^{\gamma}\left[\partial_{\gamma}\left(\zeta_2 u_{\beta}\right)-\partial_{\beta}\left(\zeta_2 u_{\gamma}\right)\right]+u^{\lambda}\partial_{\lambda}\partial_{\beta}\zeta_2-u^{\lambda}\partial_{\lambda}\partial_{\gamma}\left(\zeta_2 u^{\gamma}u_{\beta}\right)+u^{\lambda}O_{\beta}\left(u_{\lambda}\right) \tag{7.7}$$

amb:

$$u^{\lambda}O_{\beta}\left(u_{\lambda}\right)=-\zeta_2 u_{\gamma}\left(\partial_{\beta}u_{\lambda}\right)\left(\partial^{\gamma}u^{\lambda}\right)-\zeta_2 u_{\beta}\left(\partial_{\gamma}u_{\lambda}\right)\left(\partial^{\gamma}u^{\lambda}\right) \tag{7.8}$$

on s'ha tingut en compte que:

$$\left.\begin{aligned}0&=\partial^{\beta}\left(u_{\lambda}u^{\lambda}\right)=2u_{\lambda}\partial^{\beta}u^{\lambda}\\ 0&=\partial_{\alpha}\partial^{\beta}\left(u_{\lambda}u^{\lambda}\right)=2u_{\lambda}\partial_{\alpha}\partial^{\beta}u^{\lambda}+2\partial_{\alpha}u_{\lambda}\partial^{\beta}u^{\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

Tenint en compte que $u_\gamma\partial^\gamma = \mathrm{d}_\tau$, i fem l'aproximació quasi-minkowskiana per a la continuitat $\partial^\gamma u_\gamma \approx 0$, aleshores l'equació 7.7 es fa com:

$$\zeta_{m1}{}^{-1}u^{\lambda}\widetilde{R}_{\lambda\beta} \approx \partial^{\gamma}\left[\partial_{\gamma}\left(\zeta_2 u_{\beta}\right)-\partial_{\beta}\left(\zeta_2 u_{\gamma}\right)\right]+d_{\tau}\partial_{\beta}\zeta_2-d_{\tau}{}^{2}\left(\zeta_2 u_{\beta}\right)+u^{\lambda}O_{\beta}\left(u_{\lambda}\right) \tag{7.10}$$

Prenent la definició $F_{\gamma\beta} \equiv \partial_\gamma\,(\zeta_2 u_\beta) - \partial_\beta\,(\zeta_2 u_\gamma)$:

$$\zeta_{m1}{}^{-1}u^{\lambda}\widetilde{R}_{\lambda\beta} \approx \partial^{\gamma}F_{\gamma\beta}+d_{\tau}\partial_{\beta}\zeta_2-d_{\tau}{}^{2}\left(\zeta_2 u_{\beta}\right)+u^{\lambda}O_{\beta}\left(u_{\lambda}\right) \tag{7.11}$$

Recordant l'equació 7.8, arribem a:

$$\zeta_{m1}{}^{-1}u^{\lambda}\widetilde{R}_{\lambda\beta} \approx \partial^{\gamma}F_{\gamma\beta}+d_{\tau}\partial_{\beta}\zeta_2-d_{\tau}{}^{2}\left(\zeta_2 u_{\beta}\right)-\zeta_2\left(\partial_{\beta}u_{\lambda}\right)\left(d_{\tau}u^{\lambda}\right)-\zeta_2 u_{\beta}\left(\partial_{\gamma}u_{\lambda}\right)\left(\partial^{\gamma}u^{\lambda}\right) \tag{7.12}$$

8. Bibliografia

ALONSO, M.; FINN, E. (1995): Física general, Editorial Addison-Wesley: 992 p.

ASHBY, N.; IORIO, L.; LÄMMERZAHL, C.; LICHTENEGGER, H.; LUCCHESI, D. M.; MASHHOON, B.; RUGGIERO, M. L.; SCHMIDT, H. J.; TARTAGLIA, A. (2007): *The Measurement of Gravitomagnetism: A Challenging Enterprise*. Edited by L. Iorio, Nova Science, New York. ISBN 1-60021-002-3.

ASHTEKAR, A (1986). New Variables for Classical and Quantum Gravity. *Physical Review Letters* **57**: 2244–2247.

ASHTEKAR, A (1988): *New Perspectives in Canonical Gravity*. Bibliopolis, Naples, 324 p.

BAHCALL, J.; STEINHARDT, C.; SCHLEGEL, D. (2004): Does the Fine-structure Constant Vary with Cosmological Epoch? *The Astrophysics Journal* **600**, 520

BAILIN, D., A. LOVE, A. (1987): Kaluza-Klein theories. *Reports on Progress in Physics* **50**: 1087-1170.

BINI, D.; CHERUBINI, C.; JANTZEN, R. T.; MASHHOON, B. (2003): Gravitomagnetism in the Kerr-Newman-Taub-NUT spacetime. *Classical and Quantum Gravity* **20**: 457-468.

CARTAN, E. (1922): Sur une géneralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsión. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* **174**: 593–595.

CARTAN, E. (1923): Sur les variétés à conexión affine et la théorie de la relativité généralisée, *Annales de l'École Normale* **40**: 325–412.

CHAND, H.; SRIANAND, R.; PETITJEAN, P.; ARACIL, B. (2005): Probing the variation of the fine-structure constant using QSO absorption lines. *Proceedings of the International Astronomical Union* **1**: 409-411. DOI: 10.1017/S1743921305002917

CIUFOLINI, I.; KOPEIKIN, S.; MASHHOON, B.; RICCI, F. (2003): On the Gravitomagnetic Time Delay. *Physical Letters* A 308 101-109

DE ANDRADE, V.C.; ARCOS, H.I.; PEREIRA, J.G. (2004): Torsion as Alternative to Curvature in the Description of Gravitation. *Classical and Quantum Gravity* **21**: 5193.

DUFF, M.J. (1996): M-Theory (the Theory Formerly Known as Strings). *International Journal of Modern Physics A* **11**: 5623-5642.

EINSTEIN, A. (1916): Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik* **49**, retrieved 2006-09-03.

GRIBBIN, J. (2000). *The Search for Superstrings, Symmetry, and the Theory of Everything*, Brown & Company, 1st Back Edition, ISBN 0-316-32975-4.

GRUPE, D.; PRADHAN, A. K. ; FRANK, S. (2005): Studying the variation of the fine-structure constant using emission-line multiplets. *The Astronomical Journal* **130**: 355-366.

GUTIÉRREZ, C. M., M. LÓPEZ-CORREDOIRA 2010: The value of the fine structure constant over cosmological times. *Astrophysical Journal* **713**, 46. doi: 10.1088/0004-637X/713/1/46. arXiv:1002.4777v1 [astro-ph.CO].

LEVSHAKOV, S. A.; CENTURIÓN, M. ; MOLARO, P.; D'ODORICO, S.; REIMERS, D.; QUAST R.; POLLMANN, M. (2006). Most precise single redshift bound to $\Delta\alpha/\alpha$. *Astronomy and Astrophysics* **449**: 879-889. DOI: 10.1051/0004-6361:20053827.

LEVSHAKOV, S. A.; MOLARO, P.; LOPEZ, S.; D'ODORICO, S.; CENTURIÓN, M.; BONIFACIO, P.; AGAFONOVA, I. I.; REIMERS, D. (2007). A new measure of $\Delta\alpha/\alpha$ at redshift z = 1.84 from very high resolution spectra of Q1101–264. *Astronomy and Astrophysics* **466**: 1077-1082. DOI: 10.1051/0004-6361:20066064. arXiv:astro-ph/0703042v1.

LOUNESTO, P. (2001), *Clifford algebras and spinors*, Cambridge: Cambridge University Press, ISBN: 978-0-521-00551-7.

MANDL, F.; SHAW, G. (1993): Quantum Field Theory. John Wiley and Sons, Chichester.

MCDONALD, K.T. (1997): The relation between expressions for time-dependent electromagnetic fields given by Jefimenko and by Panofsky and Phillips, *American Journal of Physics* **65**: 1074–1076. DOI:10.1119/1.18723.

MOLARO P.; REIMERS D.; AGAFONOVA, I.I; LEVSHAKOV, S. A. (2008): Bounds on the fine structure constant variability from FeII absorption lines in QSO spectra. *European Journal of Physics Specials Topics* **163**: 173-189. DOI: 10.1140/epjst/e2008-00818-4. arXiv:0712.4380v1 [astro-ph].

MØLLER, C. (1952): *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, Oxford, England

MOHR, PETER J.; TAYLOR, BARRY N.; NEWELL, DAVID B. (2008): CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants. *Reviews of Modern Physics* **80**: 633–730. DOI:10.1103/RevModPhys.80.633. http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?e. http://physics.nist.gov/cuu/Constants/codata.pdf.

MURPHY, M. T.; WEBB, J. K.,; FLAMBAUM, V. V. (2003): Further evidence for a variable fine-structure constant from Keck/HIRES QSO absorption spectra. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **345**: 609. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2003.06970.x

O'NEILL, B. (1983): *Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity*. Ed. Academic Press. 468 p. eISBN: 978-0-08-057057-0.

OVERDUIN, J. M.; WESSON, P. S. (1997): Kaluza-Klein Gravity. *Physics Reports* **283**: 303-378.

PETTI, R.J. (2006). Translational spacetime symmetries in gravitational theories. *Classical and Quantum Gravity* **23**, 737-751.

STEWART, J. (2004): *Calculus: Concepts and Contexts*, 3 Ed. Brooks Cole. ISBN: 0534410030.

WALD, R.M. (1984): *General Relativity*, Chicago University Press, ISBN 0-226-87033-2.

WEBB, J. K.; FLAMBAUM, V. V. ; CHURCHILL, C. W. ; DRINKWATER, M. J. ; BARROW, J. D. (1999): A Search for Time Variation of the Fine Structure Constant. *Physical Review Letters* **82**: 884-887. arXiv:astro-ph/9803165.