Apunts sobre la Llei de Hubble per el forum.patimlameteo.com

Publicat el 15 de juliol de 2011   (última versió de 17 de juliol de 2011)

Robert Monjo i Agut

robert@temps.cat

1. Problema amb la llei de Hubble comunament utilitzada

El corriment al roig, z, es defineix com:

$$z \equiv \frac{\lambda_T}{\lambda_t} - 1 \qquad 1.1$$

on λ_t, és la longitud d'ona emesa per la font i λ_T és la longitud d'ona observada. La llei matemàtica comunament utilitzada per al corriment al roig (z) és:

$$c \cdot z = D \cdot H_0 \qquad 1.2$$

on D és la distància de l'objecte font, H_0 és la constant de Hubble i c és la velocitat de la llum. Si bé, aquesta fórmula, té un problema teòric seriós perquè dóna lloc a distàncies més grans que l'edat de l'univers multiplicat per c. Aquestes distàncies apareixen per a z > 1, ja que empíricament H_0 és la inversa de l'edat de l'univers.

2. Dues possibles solucions

A) L'efecte Doppler cosmològic pot explicar-se com si fos un efecte Doopler relativista
B) L'efecte Doppler cosmològic pot explicar-se per la dilatació de l'espai "suport" dels fotons

Abans de veure aquestes dues possibles solucions (annexes A i B), proposem un senzill model, simplificat de l'univers. Per exemple, un univers amb simetria esfèrica i expansió constant. Els raonaments són vàlids per a universos amb expansió no constant, si canviem el tractament lineal per integrals.

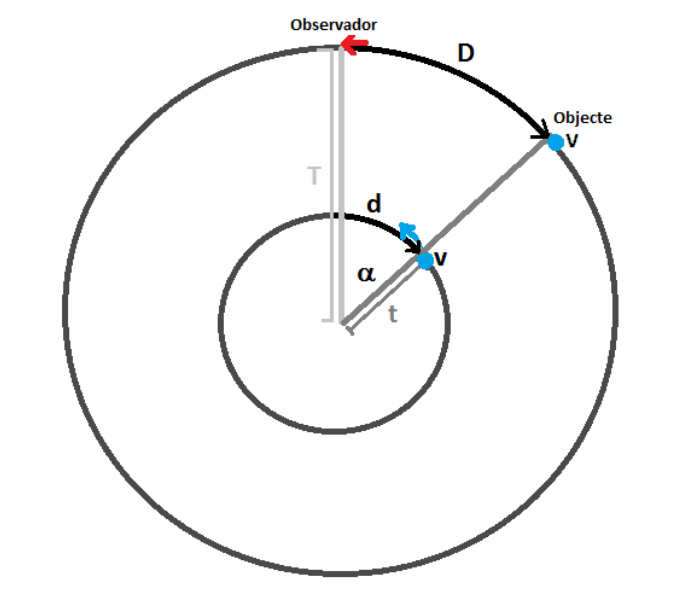

Figura 1. Exemple d'univers en expansió

3. Quina distància s'observa? D, d, o una altra diferent que aquestes?

Donat que la llum es mou des de la posició de l'objecte fins a l'observador a la velocitat de la llum, aleshores la distància que recorre la llum és L = (T – t)·c. No obstant, farem la hipòtesi de que nosaltres som capaços de mesurar la distància D i d.

4. Discussió

El corriment cap al roig es pot generalitzar per a qualsevol tipus d'univers segons la mètrica de FLRW (Friedman-Lemaître-Robertson-Walker):

$$\frac{\lambda_T}{\lambda_t} = \frac{a(T)}{a(t)} \tag{5.1}$$

on *a(t)* i *a(T)* és el factor d'escala còsmica en *t* i *T*, respectivament, i que ve donada localment per la mètrica FLRW com (d'Inverno, 1992):

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + rd\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \tag{5.2}$$

on *ds* és el diferencial de la mètrica, *dt* és el diferencial de temps, *r* és la distància, mentre que ϕ i θ són els angles del sistema de referència donat. Finalment *k* és la inversa del radi de curvatura en el punt considerat. De forma més general, l'equació 5.2 pot escriure's com:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dl^2 \tag{5.3}$$

on, segons Wald (1984), el diferencial de longitud *dl* ve donat per la mètrica *g* segons:

$$dl^2 = \left(g_{ii} - \frac{g_{0i}{}^2}{g_{00}} \right) dx_i{}^2 \tag{5.4}$$

Així doncs, per a un univers amb expansió constant, segons Monjo (2011), el factor d'escala és:

$$a(T) = \frac{T}{T_o} \tag{5.5}$$

on *T* és l'edat de l'univers en moment que es vol estudiar i T_o és l'edat actual. Amb això, noteu que l'equació 5.1 s'esdevé com l'equació B.1 de l'annex B:

$$\frac{\lambda_T}{\lambda_t} = \frac{T}{t} = \frac{D}{d} \tag{5.6}$$

D'altra banda, el paràmetre de Hubble que s'obté és:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{T} \tag{5.7}$$

Amb tot això, el corriment al roig (z) deu ser (annex B):

$$z \equiv \frac{\lambda_T}{\lambda_t} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{H_0 \cdot L}{c}} - 1 \tag{5.8}$$

on *L* és la distància recorreguda per la llum, és a dir, *L/c = T-t* és el temps transcorregut des que va ser emesa.

Referències

- d'Inverno, Ray (1992): Oxford University Press. ed. Introducing Einstein's Relativity. Oxford
- Monjo, R. (2011): *Estudi de la variació de G utilitzant el model del globus cosmològic*. Temps.cat.
- Wald, R. M. (1984): General Relativity, Chicago University Press.

A) L'efecte Doppler cosmològic pot explicar-se com si fos un efecte Doopler relativista:

$$1+z=\frac{\lambda_D}{\lambda_d}=\frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}} \qquad \text{A.1}$$

Suposant un Univers amb una velocitat d'expanció constant pròxima a c, aleshores, la velocitat relativa d'un objecte situat a una distància D, té una velocitat que ve donada per

$$v=\alpha\cdot c=\frac{d}{t}=\frac{D}{T} \qquad \text{A.2}$$

on *T* és l'edat de l'Univers quan es mesura el senyal de llum, i t és l'edat quan es va emetre (a la distància d). Per tant, juntant les dues equacions anteriors, s'obté que:

$$1+z=\frac{\sqrt{1+\frac{D}{Tc}}}{\sqrt{1-\frac{D}{Tc}}} \qquad \text{A.3}$$

aplicant que T = 1/H_0, s'obté que:

$$1+z=\frac{\sqrt{1+\frac{D\cdot H_0}{c}}}{\sqrt{1-\frac{D\cdot H_0}{c}}}=\frac{1+\frac{D\cdot H_0}{c}}{\sqrt{1-\frac{D^2\cdot H_0{}^2}{c^2}}} \qquad \text{A.4}$$

Per la qual cosa observem que es recupera de forma aproximada la lley de Hubble oficial:

$$1+z\approx\frac{1+\frac{D\cdot H_0}{c}}{1-\frac{D^2\cdot H_0{}^2}{2c^2}}\approx\left(1+\frac{D\cdot H_0}{c}\right)\left(1+\frac{D^2\cdot H_0{}^2}{2c^2}\right)\approx 1+\frac{D\cdot H_0}{c} \qquad \text{A.5}$$

És a dir

$$c\cdot z\approx D\cdot H_0 \qquad \text{A.6}$$

B) L'efecte Doppler cosmològic pot explicar-se per la dilatació de l'espai "suport" dels fotons:

$$\frac{\lambda_D}{\lambda_d} = \frac{D}{d} \qquad \text{B.1}$$

Tenint en compte el temps que tarda en viatjar la llum fins a arribar a nosaltres ($T - t = L/c$), la distància d a la que es trobava quan es va emetre és:

$$t = T - \frac{L}{c} \quad \longrightarrow \quad d \equiv t \cdot \alpha = \left(T - \frac{L}{c}\right) \cdot \frac{D}{T} = D - \frac{D \cdot L}{Tc} \qquad \text{B.2}$$

Per la qual cosa:

$$\frac{\lambda_D}{\lambda_d} = \frac{D}{d} = \frac{D}{D - \frac{D \cdot L}{Tc}} \qquad \text{B.3}$$

D'altra banda, per la definició de z:

$$1 + z = \frac{\lambda_D}{\lambda_d} = \frac{1}{1 - \frac{L}{Tc}} \qquad \text{B.4}$$

Per tant:

$$z = \frac{1}{1 - \frac{L}{Tc}} - 1 \quad \longrightarrow \quad z = \frac{1}{1 - \frac{H_0 \cdot L}{c}} - 1 \qquad \text{B.5}$$

Amb la qual cosa es recupera que aproximadament:

$$c \cdot z \approx H_0 \cdot L \qquad \text{B.6}$$

on, recordem:

$$L = (T - t) \cdot c \qquad \text{B.7}$$